専門科目(午前)

20 大修

時間 午前9:30−13:00

物 理 学 II

注意事項

1. 次ページ以後の4つの問題全てに解答せよ。
2. 各答案用紙には必ず受験番号および問題番号を記入せよ。
3. 解答は 1題ごとに別々の答案用紙に記入せよ。

   必要ならその旨表に明記してその答案用紙の裏面に書いてもよい。
4. 答案用紙は，解答を記入していないものを含めて全て提出せよ。

[1]

ラグランジャン

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} + e\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$$

で記述される質量 m 電荷 e をもつ荷電粒子の運動を考えよう。ここに $\mathbf{r}$ は荷電粒子の位置座標, $\dot{\mathbf{r}}$ は $\mathbf{r}$ の時間微分である。$\mathbf{A}$ はベクトルポテンシャルであり, スカラーポテンシャルはゼロにしている。

(1) 運動方程式を導出せよ。さらに荷電粒子の全エネルギーを求めよ。

(2) 静磁場中では (1) で求めたエネルギーが保存することを示せ。

(3) 静磁場が一様で z 方向を向いているときに, (1) の運動方程式を解き, 荷電粒子の運動がらせん運動であることを示せ。ただし, 初期値を $x = y = z = 0$, $\dot{x} = v_0$, $\dot{y} = 0$, $\dot{z} = v_{\parallel}$ とせよ。

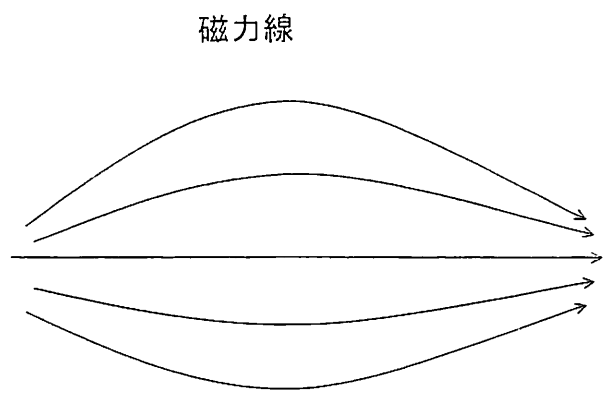
次に静的な磁束密度 B が一様でないときに以下の設問に答えよ。

(4) 磁束密度 B を、B_0 と c を定数として $\mathrm{B} = (0, 0, B_0) + c(-x/2, -y/2, z)$ と近似することができるものとしよう。ただし, 第2項は第1項と比べて十分小さいものとする。このとき, 磁力線に垂直な方向の運動エネルギーと磁束密度の z 成分 B_z の比

$$R = \frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{2B_z}$$

が, らせん運動の1回転について平均すれば, 一定であることを示せ。

(5) 図のような磁力線を持つ静的な磁場中の荷電粒子の運動は局所的には (3) のらせん運動としよう。(2) と (4) の結果を用いて荷電粒子の運動の大略を説明せよ。



[2]

大気の上層部には, 太陽光線や宇宙線により気体分子が陽イオンと電子とに分離したプラズマ状態にある電離層が存在する。地上から入射した電波が電離層で反射されることを利用して, 遠距離通信を行うことができる。この問題について考えてみよう。電子の電荷は $-e$, 質量は m, 単位体積当たりの電子数は n とする。以下では, 座標軸は地表に平行な平面を $x-y$ 平面, それに垂直上向きに z 軸をとるものとする。また, 真空の誘電率を ϵ_0, 透磁率を μ_0 とし, プラズマの比透磁率は 1 と仮定する。この電離層に, 電波が地上から入射する状況を考える。それにより電離層内に誘起された電場が

$$\mathbf{E} = (E_0 \sin(kz - \omega t), 0, 0)$$

で与えられるものとする。ここで, 電場 E_0, 波数 k, 角振動数 ω は一定とする。次の問いに答えよ。

(1) 上の電場によってプラズマ中に誘起される電流密度 $\mathbf{i}_\mathrm{e}$ および変位電流密度 $\mathbf{i}_\mathrm{D}$ を求めよ。ただし, 陽イオンは電子に比べて十分に重く動かないものとし, また, 電子の速度は光速度 c に比べて十分に小さいものと仮定して, 磁場によるローレンツ力は無視せよ。

(2) (1) で求めた全電流によって誘起される磁場を求めよ。

(3) 電離層の屈折率を求め, 電場が電離層で全反射される条件を求めよ。

(4) ラジオなどに利用される電波は, 昼間に比べて夜間はより遠方に届くようになる。その理由を考察せよ。

[3]

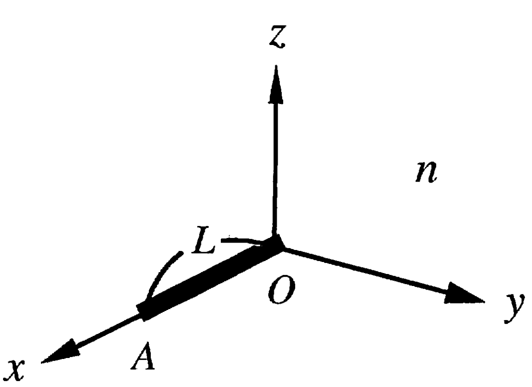
屈折率 n の一様な媒質中に閉じ込められた一個の電子の運動を考える。この電子は無限に高いポテンシャル障壁に囲まれた長さ L の x 軸上の線分 OA の上を自由に運動できるものとする。以下の問題に答えよ。

(1) この電子のシュレディンガー方程式を書き下し，その規格化された固有関数 $\psi_n(x)$ と固有エネルギー ϵ_n を求めよ。ここでは，離散的な固有エネルギーを区別する量子数をエネルギーの低いものから順に $n = 1, 2, 3, \cdots$ とする。

(2) 時刻 $t = 0$ に電子が $(\psi_1(x) + \psi_2(x))/\sqrt{2}$ という状態にあったとする。$t > 0$ において線分の片側半分 $0 \leq x \leq L/2$ に電子がある存在確率を求め，電子がどのように振舞うのかを述べよ。

(3) 電子を状態 ψ_1 から ψ_2 へ光で最も効率よく遷移させるには光の電場をどの向きにどのような振動数で加えたらよいか述べよ。ただし，光は直線偏光した平面波であるとし，光の波長は線分 OA の長さ L に比べて十分大きいとする。

(4) 線分 OA の長さが $L = 1.0 \times 10^{-9}$m，媒質の屈折率が $n = 1.5$ であるとき，遷移を起こす光の媒質中での波長を有効数字 2 桁で求めよ。なお，電子の質量は $m = 9.1 \times 10^{-31}$kg，プランク定数は $h = 6.6 \times 10^{-34}$Js，光速は $c = 3.0 \times 10^{8}$m/s とする。



[4]

2個の電子からなる仮想的な原子を考えよう。その電子のスピンを$\hbar s_1$，$\hbar s_2$とし，その間にはハミルトニアン $-Js_1 \cdot s_2$で記述される交換相互作用が働く。ただし，$J > 0$とする。電子スピン$\hbar s_1$，$\hbar s_2$はそれぞれ磁気モーメント$g\mu_B s_1$，$g\mu_B s_2$をもつ（μ_Bはボーア磁子，gは有効g因子）。下記の問いに答えよ。

(1) 原子の全スピンを$\boldsymbol{S} = s_1 + s_2$とし，その大きさを$S$とする。このとき，$S$の値と対応するエネルギー，準位の縮退度（縮重度ともいう）を求めよ。

(2) このような原子N個が温度Tで熱平衡状態にあるときの比熱を求め，低温($k_B T / J \ll 1$)，および高温($k_B T / J \gg 1$)での振る舞いを議論し，比熱の温度依存性の概略を図示せよ。ただし，ボルツマン定数をk_Bとし，必要に応じて$\beta = 1 / k_B T$を用いてもよい。

(3) さらに，原子にz軸方向の磁場Hを加えたときを考えよう。まず，原子のエネルギー準位を求めよ。

(4) この原子N個が温度Tで熱平衡状態にあるときの磁化Mを求めよ。特に，弱磁場極限$H \to 0$では，磁化Mは磁場Hに比例する。すなわち，磁化率$\chi(T)$を用いて，$M = \chi(T)H$と表すことができる。この磁化率$\chi(T)$を求め，その温度変化の概略を図示せよ。