専門科目（午前）　　　　　　　　　　　　　２１大修

時間　１０：００～１２：００

物理学（午前）

注意事項

１．　次ページ以後の３つの問題すべてに解答せよ。

２．　解答は<u>１題ごとに別々の答案用紙</u>に記入せよ。必要なら，
その旨表に明記してその答案用紙の裏面に書いても良い。

３．　各答案用紙には必ず受験番号および問題番号を記入せよ。

４．　答案用紙は，解答を記入してないものも含めてすべて提出せよ。

[1]

時間に依らないポテンシャル V があって, $x \leqq 0$ では $V = 0$, $x > 0$ では $V = -V_0$ である。ただし V_0 は定数で $V_0 > 0$。 $x = -\infty$ から右向きに, 質量 m, 運動エネルギー E の粒子が入射する。x 座標は右向きに取るので, 右向きとは x が増加する方向である。波数 k, q をそれぞれ $k = \sqrt{2mE}/\hbar$, $q = \sqrt{2m(E + V_0)}/\hbar$ と定義する。

(1) $x < 0$ および $x > 0$ において, 波動関数 ψ が満たすシュレーディンガー方程式をそれぞれ書け。

(2) $x < 0$ における波動関数は右向きの波と左向きの波の和である。右向きの波の振幅を A, 左向きの波の振幅を B と書くことにする。$x > 0$ における波動関数は右向きの波であり, その振幅を C とする。A, B, C は定数である。波動関数とその x 微分の $x = 0$ におけるそれぞれの連続の条件から, B と A の比 $\dfrac{B}{A}$ を k と q のみを用いて表せ。

(3) $x = 0$ における反射率 R は, $x < 0$ における左向きおよび右向きの粒子の流れ $\dfrac{\hbar}{2mi}(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$ の比なので $R = \dfrac{|B|^2}{|A|^2}$ である。このことと, (2) の結果とを用いて, $\dfrac{q}{k} = 2$ の場合の R の値を計算せよ。

(4) $x = 0$ における透過率 T を $T = \dfrac{|C|^2}{|A|^2}$ とすると, $R + T = 1$ にならない。この T の式のどこが間違っているかを説明せよ。

[2]

(1) x 軸上を運動する質量 m の質点を考える。質点の時刻 t での位置を $x(t)$ とする。また, 質点はポテンシャル

$$V(x) = -\frac{1}{2}m\omega^2\ell^2 e^{2x/\ell}$$

の下で運動しているものとする。ここで ω, ℓ は正の定数である。以下の問に答えよ。

(a) ニュートンの運動方程式を書き下せ。

(b) 初期条件を $x(0) = 0,\ \dfrac{dx}{dt}(0) = \omega\ell$ としたとき, 質点のエネルギー $\mathcal{E}$ の値を求めよ。

(c) 上問と同じ初期条件下で運動方程式の解を求め, その解の振る舞いを縦軸 x, 横軸 t として図示せよ。解を求める際に, 問 (b) の結果を用いるとよい。

(2) 問 (1) の質点に負電荷 $-q$ を持たせ, 正の x 方向に大きさ E の一定電場をかける。以下の問に答えよ。

(d) 質点の全ポテンシャルエネルギーを求めよ。

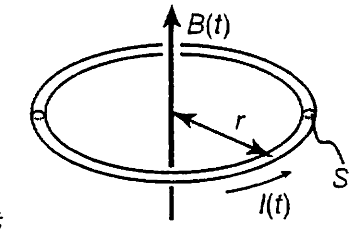
(e) 力のつりあう位置が存在する。その位置座標 x_c を q, ℓ, E, m, ω を用いて書け。

(f) つりあいの位置は安定か不安定のいずれか。図を用いて説明せよ。

(g) つりあいの位置近傍での運動を考える。ポテンシャルを位置座標について x_c のまわりで 2 次まで展開する近似のもとで, 運動方程式の解を求めよ。

[3]

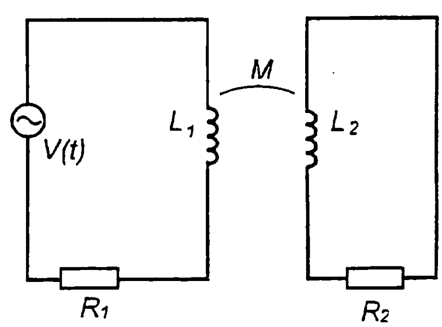
電磁調理器（IH クッキングヒーター）では，金属製の鍋に交流磁場を加えて渦電流を発生させ，そのジュール熱によって料理を加熱する。その原理を考察するため，以下の問に答えよ。



(1) (a) 右図のように，半径が r の導体のリングを考える。断面積を S とし，断面は半径 r に比べて十分小さいとする。またこの導体の抵抗率を ρ とおく。このリング一周の抵抗を求めよ。

(b) 前問 (a) のリングを含む平面に垂直に一様な交流磁場（磁束密度 $B(t) = B_0 \cos \omega t$）を加えるとき，リングに生じる電流 $I(t)$ を求めよ。リングの自己インダクタンスの効果は無視できるとする。

(c) 次に薄い導体の円板を考える。円板の底面の円の半径を R とし，厚さを h，抵抗率を ρ とする。この導体に，底面に垂直に一様な交流磁場（磁束密度 $B(t) = B_0 \cos \omega t$）を加えるとき，単位時間あたりに導体円板全体で発生する渦電流によるジュール熱の時間平均 $\bar{P}$ を求めよ。円板の自己インダクタンスの効果は無視できるとする。



(2) (1)(c) において，導体円板には一切電源が接続されていないのに，そこから熱が発生している。右図の回路を用いて，この熱エネルギーがどこから供給されるか考える。

コイル 1 には起電力 $V(t)$ の交流電源および抵抗値 R_1 の抵抗がつながれており，コイル 2 には抵抗値 R_2 の抵抗のみがつながれている。コイル 1 と 2 の自己インダクタンスをそれぞれ L_1, L_2, コイル 1 と 2 の間の相互インダクタンスを M とおく。（左の回路は電磁調理器，右の回路は鍋を表す。）

(d) コイル 1 および 2 に流れる電流をそれぞれ $I_1(t)$, $I_2(t)$ とおいたときに，$V(t)$, $I_1(t)$, $I_2(t)$ の間に成立する 2 つの関係式を求めよ。

(e) これらの式を用いて，エネルギー保存の式を書き，各項の物理的な意味を説明せよ。（この式より，コイル 2 の回路が離れていても，電源からエネルギーが供給されて抵抗 R_2 が発熱することが分かる。）

(f) 電源が角振動数 ω の交流電源（起電力 $V(t) = V_0 \cos \omega t$）のとき，単位時間あたりに抵抗 R_2 で発生するジュール熱の時間平均 $\bar{P}$ を求めよ。

専門科目（午後）　　　　　　　　　　２１大修

時間　１３：３０～１５：３０

物 理 学（午 後）

注意事項

1．　次ページ以後の３つの問題すべてに解答せよ。

2．　解答は<u>１題ごとに別々の答案用紙</u>に記入せよ。必要なら，

　　その旨表に明記してその答案用紙の裏面に書いても良い。

3．　各答案用紙には必ず受験番号および問題番号を記入せよ。

4．　答案用紙は，解答を記入してないものも含めてすべて提出せよ。

[1]

$x \geq 0, t \geq 0$ で定義された関数 $u(t,x)$ が拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (*)$$

を満たし, 初期条件, 境界条件がそれぞれ

$$u(0,x) = f(x), \;\; u(t,0) = \varphi(t)$$
$$u(t,\infty) = 0, \;\; \left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right|_{x=\infty} = 0$$

で与えられている。$u(t,x)$, $f(x)$ が x について奇関数となるように $(-\infty, 0)$ に拡張し, フーリエ変換を用いて解 $u(t,x)$ を求める。ここでは, $u(t,x)$ の x についてのフーリエ変換 $\hat{u}(t,k)$ およびフーリエサイン変換 $v(t,k)$ をそれぞれ

$$\hat{u}(t,k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(t,x) e^{-ikx} dx$$
$$v(t,k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} u(t,x) \sin kx \; dx$$

と定義する。

(1) $v(t,k) = i\hat{u}(t,k)$ を示せ。

(2) $g(t,x) = \dfrac{1}{\sqrt{2t}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{4t}\right)$ $(t > 0)$ のフーリエ変換 $\hat{g}(t,k)$ を求めよ。

(3) 式 $(*)$ の両辺のフーリエサイン変換をとることにより,

$$\frac{\partial v(t,k)}{\partial t} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k\varphi(t) - k^2 v(t,k)$$

を導け。

(4) 特に $\varphi(t) = 0$ とした場合について, $v(t,k)$ および $u(t,x)$ を求めよ。(f, g を含む積分表示でよい。)

(5) $\varphi(t)$ が一般の場合について, 問 (3) の式より $v(t,k)$ を求めよ。(積分表示でよい。)

(6) 問 (5) の結果より $u(t,x)$ を求めよ。(積分表示でよい。)

[2]

長さ d の棒 N 個からなる鎖が温度 T のもとで下図のように水平に連なっている。隣接する棒の間の角度は 0 あるいは π のみが許され，$N \gg 1$ とする。それぞれの棒は図の矢印のように "向き" をもっている。ボルツマン定数を k とする。なお，必要に応じて $N \gg 1$ の場合に成立するスターリングの公式 $\ln N! = N \ln N - N$ を用いよ。

(1) はじめに，鎖の両端の距離を L に保った場合を考える。以下の問に答えよ。

(a) 右向きの棒の数を n_1, 左向きの棒の数を n_2 とする。このときの場合の数 W を求めよ。

(b) この系のエントロピー S を求めよ。

(c) 変数 x を次式で定義する。

$$x = \frac{L}{Nd}$$

このとき，n_1 と n_2 を N と x で表せ。

(d) 自由エネルギー F が次式で表されることを示せ。

$$F(x) = -NkT\left[\ln 2 - \frac{1}{2}(1+x)\ln(1+x) - \frac{1}{2}(1-x)\ln(1-x)\right] \qquad \text{(i)}$$

(e) 鎖の両端に働く張力 Y が次式で表されることを示せ。

$$Y = \frac{kT}{2d}\ln\frac{1+x}{1-x} \qquad \text{(ii)}$$

(2) 次に棒が矢印方向に磁気モーメント μ ($\mu > 0$) をもつ場合を考え，一様な静磁場 H を右向きに加える。以下の問に答えよ。

(f) 1 本の棒あたりの分配関数 z を求めよ。

(g) 右向きの棒の数 n_1 と左向きの棒の数 n_2 を求めよ。

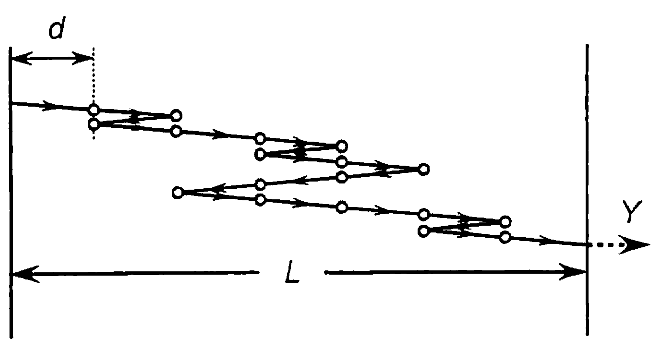
(h) 鎖の長さ L が次式で表されることを示せ。

$$L = Nd\,\frac{e^{\mu H/kT} - e^{-\mu H/kT}}{e^{\mu H/kT} + e^{-\mu H/kT}} \qquad \text{(iii)}$$

(3) 問 (1) のように鎖の両端の長さを L に固定するのに必要な張力 Y と，問 (2) のように熱平衡状態の鎖の長さ L を与える磁場 H の間には

$$Yd = \mu H \qquad \text{(iv)}$$

の関係があることを示せ。



(見やすくするために，隣接する棒の間の角度は 0 と π から少しずらしている)

[3]

以下の小問 (1)ー(3)に答えよ。

(1) $10^{-3} \sim 10$ T 程度の定常磁場の大きさを測定する方法を１つ挙げ，その動作原理を図を用いるなどして簡潔に説明せよ。ただし，文章は 10 行以内とする。

(2) NaCl の結晶では Na イオンと Cl イオンが共に面心立方格子を形成している。以下の問に答えよ。ただし，解答欄の図は NaCl の単位格子を表し，***a*, *b*, *c*** は立方格子の基本ベクトルを表している。

(a) 単位格子内の Na イオンと Cl イオンの位置を，解答用紙の図 (a) にそれぞれ白丸（○）と黒丸(●)で示せ．ただし，Na イオンの１つは原点 O にあるとする。

(b) 格子面 (1 1 1) を解答用紙の図 (b) に斜線を引いて示せ。

(3) $10^{-3} \sim 10^{-5}$ Pa 程度の高真空を得る一般的な装置の１つとして，油回転ポンプ (RP) と油拡散ポンプ (DP) を組み合わせた装置がある。下図はその模式図である。V1，V2，V3，VL はバルブで，VL は大気圧に戻すときに使うリークバルブである。初め，これらのバルブは全て閉じてあるものとし，また，装置の全ての部分は，大気圧にあるとする。以下の問に答えよ。

(c) 真空度を測る真空計として，低真空用のガイスラー管 (1 atm ~ 10^{-1} Pa) と高真空用の電離真空計 ($10^{-1} \sim 10^{-5}$ Pa) の２つを用いるとすると，それぞれ図の A~D のどこに設置すればよいか。

(d) 図の真空容器を高真空にするための操作手順を，１番目，２番目…のように番号を付けて箇条書きせよ。操作手順には RP や DP のスイッチを入れること，バルブの開閉，DP の冷却装置のスイッチを入れること，窒素トラップに液体窒素を入れることなどが含まれる。また，操作手順には「ガイスラー管の蛍光が消えたら，バルブ…を開ける」などのように，操作を行うタイミングが分かるように記せ。