

専門科目（午前）

22大修

時間 10:00~12:00

物理学（午前）

注意事項

1. 次ページ以後の3つの問題すべてに解答せよ。
2. 解答は1題ごとに別々の答案用紙に記入せよ。必要なら、その旨表に明記してその答案用紙の裏面に書いても良い。
3. 各答案用紙には必ず受験番号および問題番号を記入せよ。
4. 答案用紙は、解答を記入してないものも含めてすべて提出せよ。

[1]

ハミルトニアンが2行2列の行列：

$$H = \omega \hbar \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{i})$$

で与えられている。ただし、 ω と θ は定数で、 \hbar はプランク定数を 2π で割ったものである。以下の問いに答えよ。

- (1) H の固有値 E_+ , E_- と、それぞれの固有値に対応する規格化された固有ベクトル ψ_+ , ψ_- を求めよ。
- (2) シュレーディンガー方程式をみたす、時刻 t における状態ベクトル $\psi(t)$ を E_+ , E_- と ψ_+ , ψ_- を用いて表せ。さらに、初期状態を

$$\psi(t=0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{ii})$$

として、 $\psi(t)$ を ω と θ で表せ。

- (3) 上記(2)の量子状態に対して時刻 t において測定を行い、 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を得る確率を求めよ。
- (4) このハミルトニアンは、磁気モーメント μ をもつ $1/2$ スピンの粒子が、磁束密度 B に置かれた場合の量子力学を記述する。 θ の幾何学的な意味を述べて、ハミルトニアン(i)のパラメータ ω を μ と B で表わせ。

参考：パウリ行列

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{iii})$$

[2]

(1) 極座標系でその位置が表される平面上の質点 (r, φ) がある。この質点の速度 $v = (v_r, v_\varphi)$ および加速度 $a = (a_r, a_\varphi)$ を極座標で表せ。ただし速度ベクトル v の r 方向成分が v_r 、 φ 方向成分が v_φ である。加速度についても同様である。

(2) 北緯 30° にある野球場でバッターが真北に向かって球を打ったところ 150 m 飛んでスタンドに到達した。打球はまっすぐに飛んでいくはずであったが、コリオリの力のために到達点が直線方向から少しずれた。どちらの方向にどれだけずれたか。球の鉛直方向の運動は無視し、50 m/s の一定の速さで飛んでいったとする。なお北緯 30° における、地表面に垂直な方向を回転軸とした地表面の角速度は地球の自転の角速度の $\sin 30^\circ$ 倍になる。

(3) 回転できる大きな円板がある。この円板に乗って中心から動径方向 (r 方向) に 1 本の直線を引く。円板が止まっているとき、この直線に沿って歩くことは容易であるが、円板が回転しているとまっすぐに歩いているつもりでも直線からずれていってしまう。つまり r 方向と直角な方向 (φ 方向) に速度の変化が生じている。これがコリオリの力による加速度であるが、その大きさは次の二つの要因に分けて考えることができる。

- ① 半径 r が変化することによる φ 方向の速度の変化。
- ② 回転で r 方向が変化することによる φ 方向の速度の変化。

それぞれの大きさを求めよ。ただし歩く速度の r 方向成分 \dot{r} および円板の角速度 $\dot{\varphi}$ はどちらも一定であるとする。[ヒント：ある時刻での位置 (r, φ) およびそれから Δt 秒経過した後の位置でのそれぞれの速度ベクトルを r, φ 成分に分けて図に描くと求めやすい。]

[3]

無限に長い円柱状の導線を流れる電流について、以下の問いに答えよ。導線の半径を a 、電気伝導率を σ 、透磁率を μ とする。また、円柱の軸を z 軸にとる。

- (1) 図のように、大きさ I の直流電流が、 z 軸の正の向きに一様に流れている。
- (a) 導線内外で発生する磁場の大きさ H を、 z 軸からの距離 r の関数として求めよ。またその結果を、縦軸 H 、横軸 r のグラフに示せ。
- (b) 導線の単位長さ当たりの内部インダクタンス L (電流 I によって導線内部に発生する磁束に起因する自己インダクタンス) を求めよ。
- (2) 直流電流に代わり角振動数 ω の交流電流を流す。この場合電流が時間変化するため、導線内部の磁場も時間変化し、これが導線内部に誘導電場 (起電力) を発生させる。このため、導線の断面内で電流の分布が一様でなくなり、導線内部に比べ表面により大きな電流が流れるようになる。この現象を以下の順に考えていく。
- (c) 導線を流れる電流の電流密度ベクトル \mathbf{J} とベクトルポテンシャル \mathbf{A} の間には、次の微分方程式が成り立つことを示せ。ここで、 \mathbf{A} は $\text{div} \mathbf{A} = 0$ を満たすとせよ。また、変位電流 (電束電流) の効果は考えなくてよい。

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad (\text{i})$$

必要ならば、次のベクトル演算の公式を用いよ： $\text{rot}(\text{rot} \mathbf{A}) = \text{grad}(\text{div} \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

さて、電流密度 \mathbf{J} は z 成分 J_z のみをもち、 z 軸からの距離 r のみの関数 $J_z(r)$ である。したがって微分方程式(i)の z 成分のみを考える。電場と \mathbf{A} の z 成分をそれぞれ E_z 、 A_z とし、オームの法則 $J_z = \sigma E_z$ と $E_z = -\frac{\partial A_z}{\partial t}$ を組み合わせた式 $J_z = -\sigma \frac{\partial A_z}{\partial t}$ を用いると、

$$\nabla^2 A_z = -\mu J_z = \mu \sigma \frac{\partial A_z}{\partial t} \quad (\text{ii})$$

を得る。

- (d) 導線の表面付近で、表面から内部に向かって J_z の大きさ $|J_z|$ が減少する様子は、

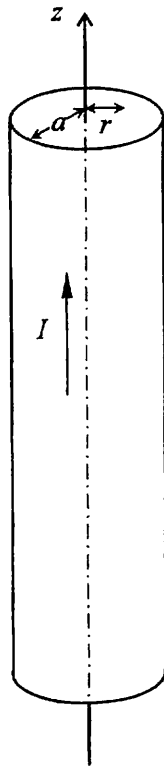
A_z を $A_z = A_0 \exp(i\omega t)$ と置いて(ii)式に代入し、 $\nabla^2 A_z \approx \frac{d^2 A_z}{dr^2}$ という近似の下で

解くことにより調べることができる。その結果、

$$|J_z(r)| = |J_z(a)| e^{-(a-r)/\delta}$$

という形の解をもつことがわかった。ここで δ は、表面付近を流れる電流層の特徴的厚さを表す。 δ を求めよ。

- (e) 以上の結果を踏まえ、高周波の交流電流を送電する際に考えられる、実用上の問題点と対処法について述べよ。



専門科目（午後）

22大修

時間 13:30～15:30

物理学（午後）

注意事項

1. 次ページ以後の3つの問題すべてに解答せよ。
2. 解答は1題ごとに別々の答案用紙に記入せよ。必要なら、その旨表に明記してその答案用紙の裏面に書いても良い。
3. 各答案用紙には必ず受験番号および問題番号を記入せよ。
4. 答案用紙は、解答を記入してないものも含めてすべて提出せよ。

[1]

以下の問いに答えよ。必要であれば、次の定積分を証明なしで用いてもよい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{A}{2}x^2\right) dx = \sqrt{\frac{2\pi}{A}} \quad (A > 0)$$

(1) a を正の実数として、次の積分を求めよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + a^4}$$

(2) 次式で定義されるガンマ関数を考える。

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (x > 0)$$

(a) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ を示せ。

(b) $e^{-t}t^x = \exp[-f(t)]$ とする。このとき $f'(t_0) = 0$ となる t_0 を求めよ。

(c) $f(t)$ を t_0 のまわりでテイラー展開し、 $t-t_0$ の2次までの係数を求めよ。

(d) $x \gg 1$ の場合の近似公式 $\Gamma(x+1) \approx \sqrt{2\pi} x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x}$ を導出せよ。

(3) エルミート多項式 $H_n(x)$ を次式により定義する。

$$\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2} = (-1)^n H_n(x) e^{-x^2/2} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

(a) $H_0(x)$, $H_1(x)$, $H_2(x)$ を求めよ。

(b) 関数 $f(x)$ のフーリエ変換を $\tilde{f}(q)$ とする。すなわち、

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(q) e^{iqx} dq$$
$$\tilde{f}(q) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iqx} dx$$

このとき、次式で与えられる $\psi_n(x)$ に対して $\tilde{\psi}_n(q)$ を求めよ。

$$\psi_n(x) = H_n(x) e^{-x^2/4}$$

[2]

次のハミルトニアン

$$H = \sum_{i=1}^N \left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x_i^2 \right) \quad (\text{i})$$

で記述される独立な N 個の調和振動子の系が温度 T の熱平衡状態にある。 k をボルツマン定数、 $\beta = \frac{1}{kT}$ として以下の問いに答えよ。必要なら次の積分公式を使ってよい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{A}{2}x^2\right) dx = \sqrt{\frac{2\pi}{A}} \quad (A > 0) \quad (\text{ii})$$

(1) 古典統計力学を適用すると、この系の分配関数が次の式で表されることを示せ。

$$Z = \left(\frac{1}{\beta\hbar\omega} \right)^N \quad (\text{iii})$$

(2) 上の Z から、ヘルムホルツの自由エネルギーを求めよ。

(3) 上の結果を使ってこの系のエントロピー $S_c(T)$ を求めよ。

(4) $S_c(T)$ の関数形を次のページの図 (ア) から (ク) の中から選べ。図はいずれも横軸が $\frac{kT}{\hbar\omega}$ で縦軸が $\frac{S_c}{kN}$ である。

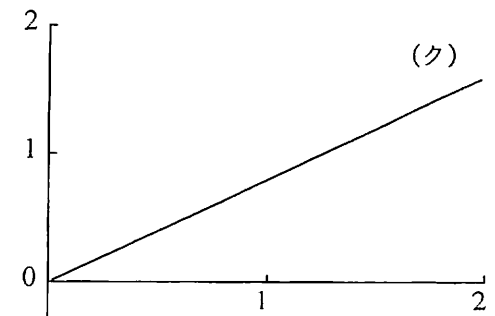
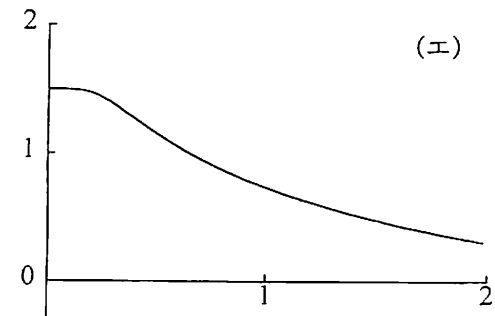
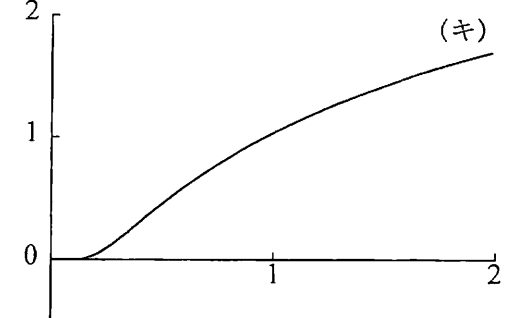
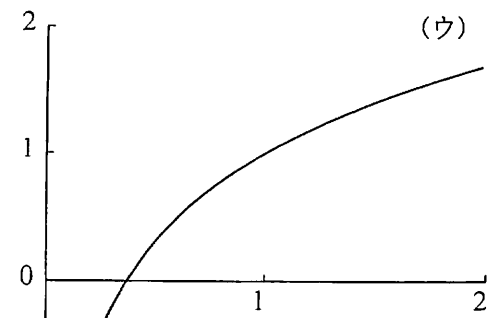
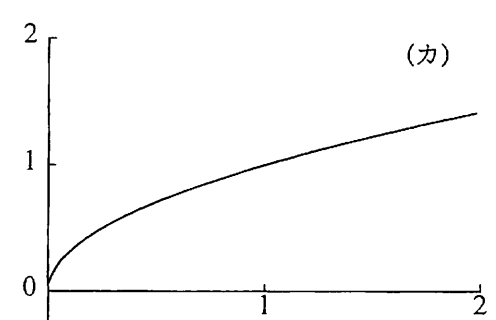
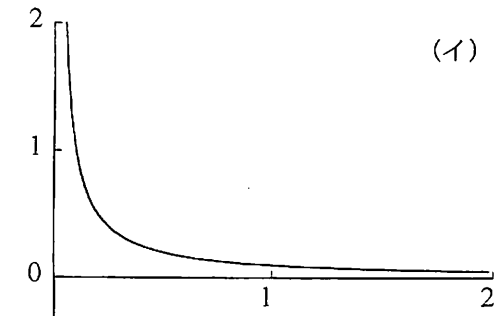
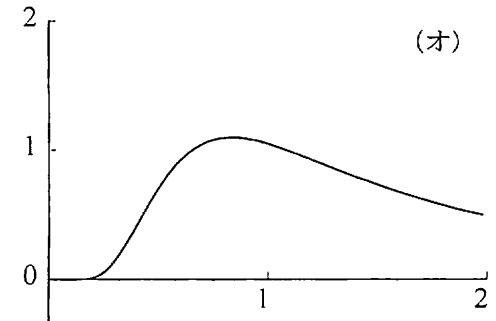
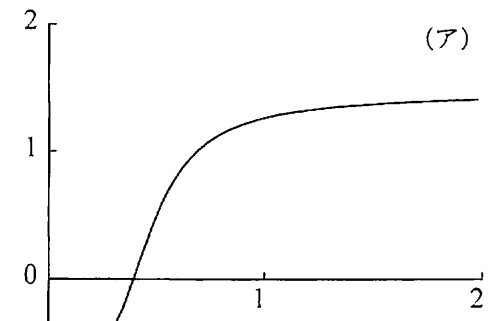
(5) 次に量子統計力学をハミルトニアン (i) の系に適用し、ヘルムホルツの自由エネルギーを求めよ。1 個の調和振動子の量子力学的なエネルギー準位が $\left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) であることを使ってよい。

(6) (5) の結果を使って、エントロピー $S_q(T)$ が次の式で表されることを示せ。

$$S_q(T) = -Nk \log(1 - e^{-\beta\hbar\omega}) + \frac{N\hbar\omega}{T} \cdot \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \quad (\text{iv})$$

(7) $S_q(T)$ の関数形を次のページの図 (ア) から (ク) の中から選べ。図はいずれも横軸が $\frac{kT}{\hbar\omega}$ で縦軸が $\frac{S_q}{kN}$ である。

(8) $S_c(T)$ と $S_q(T)$ は十分低い温度領域で顕著に異なる振る舞いを示す。その物理的な理由を言葉で述べよ。



[3]

(1) ホイートストン・ブリッジの回路図を示せ。また、それによる電気抵抗の抵抗値の測定法について数行程度で概説せよ。ただし次のものを用いること。[固定抵抗 R_1 , 固定抵抗 R_2 , 可変抵抗 R_V , 未知抵抗 R_X , 電池 V , スイッチ S , 検流計 G]

(2) 以下の問いに答えよ。

(a) 二つの量 x, y の間にそれぞれ (ア) - (オ) のような関係が成り立つと予想される時、 x, y を測定して予想通りの関係が見られるかを調べるために、縦軸、横軸にプロットする量として最も適切なものを (カ) - (ソ) の中から選んで答えよ。ただし a, b は定数であり、 x および y は正であるとする。

(ア) $y = ax + b$

(イ) $y = a \exp(b/x)$

(ウ) $y = a \exp(bx)$

(エ) $y = ax^b$

(オ) $y = ax + bx^3$

縦軸： (カ) y (キ) y^2 (ク) y/x (ケ) $1/y$ (コ) $\log y$

横軸： (サ) x (シ) x^2 (ス) x^3 (セ) $1/x$ (ソ) $\log x$

(b) 以下に挙げるそれぞれの量の間になり立つ関係は (ア) から (オ) のどれに最も近いと考えられるか。いずれも温度は 0°C から 100°C 付近の範囲であるとする。

(タ) x : 絶対温度, y : 銅線の電気抵抗

(チ) x : 絶対温度, y : サーミスタ測温体 (温度測定用に用いられる, 温度係数が負であるもの) の電気抵抗

(3) スズの凝固点を調べるために次のような実験を行なった。るつぼにスズを入れ、電気炉中でまず加熱してスズを完全に融解させた。その後今度は冷却しながら、スズの温度の時間変化の様子を測定した。このとき、過冷却が観測される場合には試料温度の時間変化の様子はどのようになるか概略を図示し、数行程度で説明せよ。図においては温度軸上に凝固点を示せ。またどの部分が過冷却状態の出現を示しているかを明示せよ。

(4) 以下の量のおよその値を単位も含めて答えよ。

(a) 1気圧のもとでのスズの凝固点 (絶対温度で)

(b) 0°C におけるスズ 1 g の熱容量

(c) 1気圧のもとでの窒素の沸点 (絶対温度で)

(d) 1気圧のもとでの ^4He の沸点 (絶対温度で)