専門科目（午前）　　　　　　　　　　23 大修

時間 10:00~12:00

物理学（午前）

注意事項

1．次ページ以後の３つの問題すべてに解答せよ。

2．解答は１題ごとに別々の答案用紙に記入せよ。必要なら，その旨表に明記してその答案用紙の裏面に書いても良い。

3．各答案用紙には必ず受験番号および問題番号を記入せよ。

4．答案用紙は，解答を記入していないものも含めすべて提出せよ。

[1]

以下の問いに答えよ。

（1）

（a）次の同次微分方程式の一般解を求めよ。

$$(x+1)\frac{d^2y}{dx^2}-(x+2)\frac{dy}{dx}+y=0$$

（b）次の非同次微分方程式の一般解を求めよ。

$$(x+1)\frac{d^2y}{dx^2}-(x+2)\frac{dy}{dx}+y=xe^x$$

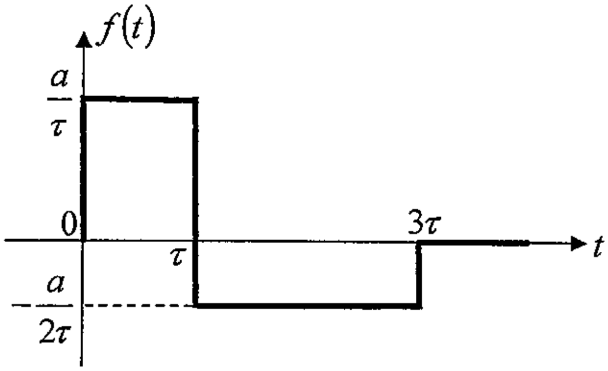
（2）次の積分を，複素積分を用いて求めよ。

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ax}{b^2+x^2}dx \qquad (a,b>0)$$

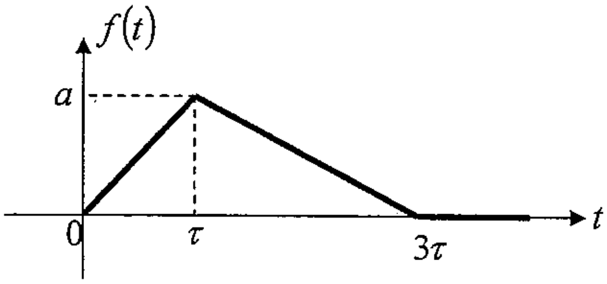
（3）次の図に示す関数 $f(t)$ のラプラス変換を求めよ。ただし関数 $f(t)$ のラプラス変換は

$F(s)=\int_0^{\infty}f(t)e^{-st}dt$ で定義される。

（a）



（b）



[2]

惑星が太陽の重力によって楕円軌道を周回するケプラー運動について考える。以下の問いに答えよ。

(1) 太陽を原点としたときの惑星の相対位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ としたとき，運動方程式は以下のようになる。

$$\mu\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\kappa\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

ここで，$r \equiv |\boldsymbol{r}|$ である。太陽と惑星の質量をそれぞれ M, m，重力定数を G としたとき，換算質量 μ および係数 κ はどのように与えられるか。答のみ書け。

(2) 相対運動の全エネルギー E の表式を求めよ。ただし，$r \to \infty$ で重力のポテンシャルエネルギーが 0 となるようにせよ。また，惑星が周回運動をするための条件を E を用いて表せ。

(3) 角運動量ベクトル $\boldsymbol{L} \equiv \boldsymbol{r} \times \mu\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ が保存することを示せ。

(4) この系では方向に関係した保存量が存在することが知られている。実際，以下で定義されるベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}$ が保存することを示せ。

$$\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \frac{\boldsymbol{r}}{r} + \frac{\boldsymbol{L}}{\kappa} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

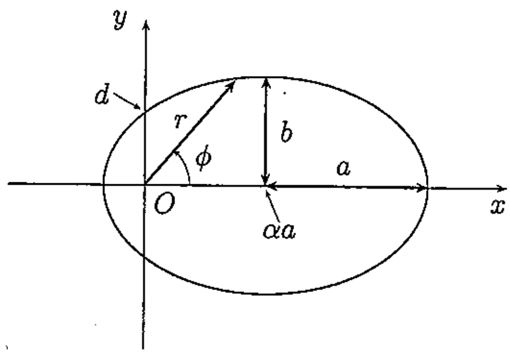
(5) ベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}$ と相対位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ との内積を $r, \mu, \kappa, L(\equiv |\boldsymbol{L}|)$ を用いて表せ。

(6) 上記 (5) の 2 つのベクトルのなす角を ϕ として，r と ϕ との関係式を求めると楕円の極座標表示が得られる。これより，惑星の描く楕円軌道の長軸と短軸の長さをそれぞれ μ, κ, L, E を用いて表せ。ここで，$\varepsilon \equiv |\boldsymbol{\varepsilon}|$ に対する次の関係式

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{2L^2}{\mu\kappa^2}E$$

および，図に示される楕円の極座標表示と，長軸 a と短軸 b の長さの公式を用いてよい。

$$r = \frac{d}{1-\alpha\cos\phi}, \quad a = \frac{d}{1-\alpha^2}, \quad b = \frac{d}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$



(7) エネルギー E を固定したとき，楕円軌道の形が角運動量の大きさ L にどのように依存するかを述べよ。

[3]

質量 m，角振動数 ω の1次元調和振動子のハミルトニアンは以下で与えられる。

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}$$

ここで，$\hat{p}$ は運動量演算子，$\hat{x}$ は位置演算子であり，交換関係 $[\hat{x},\hat{p}] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar$ を満たす。また，以下で定義される2つの演算子 $\hat{a}^\dagger$, $\hat{a}$ を考える。

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right), \qquad \hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right)$$

以下の問いに答えよ。

(1) 交換関係 $[\hat{a},\hat{a}^\dagger]$ を求めよ。また，ハミルトニアン $\hat{H}$ を $\hat{a}^\dagger, \hat{a}$ を用いて表せ。

(2) 演算子 $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ の固有値を n とし，その規格化された固有状態を $|n\rangle$ とする。すなわち，$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$, $\langle n|n\rangle = 1$ である。次の2つの関係式が成り立つことを示し，係数 A, B を求めよ。

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = A|n+1\rangle, \qquad \hat{a}|n\rangle = B|n-1\rangle$$

ただし，A, B は正の実数とする。

(3) 演算子 $\hat{N}$ の固有値 n が非負の整数となることを示せ。

(4) 上記 (2) で定義された固有状態 $|n\rangle$ の規格化された波動関数を $\psi_n(x) = \langle x|n\rangle$ とする。ここで，$|x\rangle$ は演算子 $\hat{x}$ の固有状態である。基底状態 $|0\rangle$ の満たす条件 $\hat{a}|0\rangle = 0$ を用いて，$\psi_0(x) = \langle x|0\rangle$ を求めよ。なお，以下の関係式を用いてもよい。

$$\langle x|\hat{p}|n\rangle = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\langle x|n\rangle$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-cx^2\right) dx = \sqrt{\frac{\pi}{c}}$$

ここで，c は正の定数である。

(5) 上記 (4) で定義された波動関数 $\psi_n(x)$ は $y \equiv x\sqrt{m\omega/\hbar}$ の多項式 $H_n(y)$ を用いて以下のように書ける。

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{1}{2^n n!}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) H_n(y)$$

ここで，$0! = 1$ とする。このとき，上記 (2) で得られた関係式 $|n+1\rangle = \frac{1}{A}\hat{a}^\dagger|n\rangle$ を用いて，$H_{n+1}(y)$ と $H_n(y)$ の間の関係式を導け。

専門科目(午後)　　　　　　　　23 大修

時間　13:30-15:30

物　理　学　（午後）

注意事項

1. 3つの問題すべてに解答せよ。
2. 問題ページは、6ページからなる。白紙部分は、下書きのために使ってよい。
3. 解答用紙は、3枚である。
4. 試験開始後、問題冊子、解答用紙のページ数を確認し、不足しているときは、申し出てください。
5. 解答は、所定の解答用紙の枠内に書くこと。
6. 各解答用紙には、必ず受験番号を記入すること。
7. 解答用紙は、解答を記入しないものも含めてすべて提出せよ。

[1]

以下の問いに答えよ。必要であれば，十分大きな$N(\gg 1)$に対して成立するスターリングの式

$$\log N! \sim N\log N - N$$

を用いてもよい。ボルツマン定数をk_Bとする。

(1) 不純物のない結晶中においても，熱励起に起因する様々な格子欠陥が存在する。ここでは，結晶内部の原子が格子点から格子間隙に移る欠陥について考える(右図参照)。完全結晶の格子点数をN，原子の入りうる格子間隙の数を$N'(\sim N)$とする。また，1つの欠陥を形成するエネルギー$w(>0)$は，格子間隙の原子と空格子の距離に依存しないものとする。

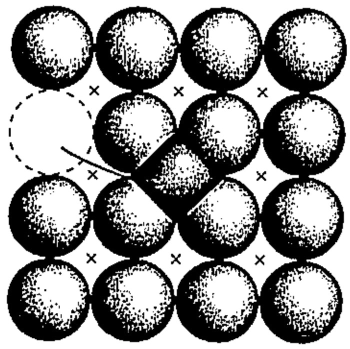


図: 2次元正方格子における欠陥。図中の×は原子の入りうる格子間隙を表している。

(a) 完全結晶からn個の原子を選び出し，n個の欠陥をつくるとき，場合の数$W(n)$を求めよ。ここで，$1 \ll n \ll N, N'$とする。

(b) 結晶中に欠陥がn個存在している時，内部エネルギー$E(n)$，エントロピー$S(n)$を求めよ。ここで，$W(n)$を用いても良い。

(c) 自由エネルギー$F(n)$の極小条件から，温度Tの熱平衡状態における欠陥数nを求めよ。ここで，$k_BT \ll w$とする。

(2) N個のスピン$(S=1)$からなる磁性体がある。この磁性体のハミルトニアンは，1軸異方性を表す定数Dを用いて以下のように記述される。

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N}\mathcal{H}_i, \qquad \mathcal{H}_i = D\,(S_i^z)^2$$

(a) i番目のスピンに対するハミルトニアン$\mathcal{H}_i$のとりうるエネルギー固有値を求めよ。

(b) 磁性体の分配関数を求めよ。

(c) 磁性体のエントロピーを求め，その温度変化の様子を$(D>0, D=0, D<0)$の場合に分けて概形を図示せよ($T\to 0,\infty$の極限値を明示すること)。また，$T\to 0$における振る舞いの違いについて説明せよ。

[2]

2 種類の電荷 (I) と (II) が S 上に分布している。ここで, S は $z=0$ の xy 平面とする。電荷 (I) は S 上を動くことができる。時刻 t における (I) の電荷面密度を, $\sigma(x,y,t)$ [$\mathrm{Cm^{-2}}$] とすると, $\sigma(x,y,t)=\sigma_0+\delta\sigma(x,y,t)$ と書くことができる。ただし, σ_0 は $\sigma(x,y,t)$ の平均値である。一方, 電荷 (II) は, $-\sigma_0$ の一様な電荷面密度で S 上に固定されている。これによって, 全体の電気的中性が保たれ, S から十分に離れたところでは, 静電ポテンシャルを 0 と定義することができる。

電荷面密度の微小変化 $\delta\sigma(x,y,t)$ が, S の上を波動として伝播する現象を考察してみよう。ただしここでは, 光速 c を無限大とし, 各時刻 t における電荷分布 $\delta\sigma(x,y,t)$ から, 静電ポテンシャル $\phi(x,y,z,t)$ が決まるものと考えてよいこととする。またこの問では, 以下の記号を使用する。

$$
\begin{aligned}
\nabla_2 &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \\
\Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}
\end{aligned}
$$

以下の問いに答えよ。

(1) 電荷面密度の変化 $\delta\sigma(x,y,t)$ に付随して, S 上には電流が流れる。その電流密度を $\vec{j}(x,y,t)$ [$\mathrm{Cs^{-1}m^{-1}}$] とするとき, $\delta\sigma$ と $\vec{j}$ の間には連続の式が成り立つ。それは,

$$\frac{\partial\delta\sigma}{\partial t}+\boxed{(\mathrm{A})}=0 \qquad \text{(i)}$$

と書くことができる。$\boxed{(\mathrm{A})}$ に入る表式を示せ。

(2) 電荷面密度の変化 $\delta\sigma(x,y,t)$ により, 空間に電場が発生する。その電場は, 静電ポテンシャルの境界値問題として求めることができる。静電ポテンシャルを $\phi(x,y,z,t)$ と書くとき, $z\neq 0$ において $\phi(x,y,z,t)$ は

$$\Delta\phi=0 \qquad \text{(ii)}$$

を満たす。(ii) 式を, $\phi\to 0$ ($z\to\pm\infty$) と, 下記の境界条件を満たすように解くことによって, 静電ポテンシャルを求めることができる。$z<0$, $z>0$ の領域における静電ポテンシャルをそれぞれ, ϕ_1, ϕ_2 とするとき, $z\to 0$ において, ϕ_1, ϕ_2, $\delta\sigma$ の間に成り立つ ϕ の境界条件は,

$$
\begin{aligned}
\nabla_2\phi_1 &= \nabla_2\phi_2 && \text{(iii)} \\
\left.\frac{\partial\phi_1}{\partial z}\right|_{z\to 0} - \left.\frac{\partial\phi_2}{\partial z}\right|_{z\to 0} &= \boxed{(\mathrm{B})} && \text{(iv)}
\end{aligned}
$$

である。$\boxed{(\mathrm{B})}$ に入る表式を示せ。ただし, 真空の誘電率を ϵ_0 とする。

(3) 今, 電荷面密度の変化にともなう静電ポテンシャルを,

$$\phi_1 = Ae^{kz}\sin(kx-\omega t) \quad (z<0) \tag{v}$$
$$\phi_2 = Ae^{-kz}\sin(kx-\omega t) \quad (z>0) \tag{vi}$$

という関数形 (ただし $k>0, \omega>0$) であると仮定すると, ϕ_1, ϕ_2 は x 軸方向に位相速度 ω/k で伝播する波動を表す。この静電ポテンシャルが (ii) 式を満たすこと, また, $z\to\pm\infty$ で ϕ_1, $\phi_2 \to 0$ となることを示せ。

(4) 静電ポテンシャル (v), (vi) 式を仮定して, (iv) 式から $\delta\sigma(x,y,t)$ を求めよ。

(5) 電荷 (I) が電子の集団であるとして, $|\delta\sigma|$, $|\vec{j}|$ が小さく, それらの間の積を無視することができるとすると, 次の運動方程式が得られる。

$$\frac{\partial\vec{j}}{\partial t} = \frac{q\sigma_0}{m}\left(-\nabla_2\phi_1\right)\Big|_{z=0} \tag{vii}$$

ただし, ここで q は電子の電荷, m は電子の質量である。(i) 式および (vii) 式から $\vec{j}$ を消去し, 前問と同じ静電ポテンシャル (v), (vi) 式を仮定して, ω と k の間の関係を求めよ。

(6) 電荷面密度の平均 σ_0 が -1.6×10^{-7} Cm^{-2} で, 波の波長が 1.0 mm のとき, この波の位相速度を有効数字 2 桁まで求めよ。必要であれば, 以下の定数および平方根を求める際の近似式を用いてよい。

$$\epsilon_0 = 8.9\times10^{-12}\ \mathrm{Fm^{-1}}$$
$$q = -1.6\times10^{-19}\ \mathrm{C}$$
$$m = 9.1\times10^{-31}\ \mathrm{kg}$$
$$\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{1}{2}x \quad (|x|\ll 1)$$

[3]

波長1.0×10^{-6} mのレーザーが出力1.0 Wで連続発振している。この光を円板に垂直に照射することによって，光が物体に及ぼす力学的作用を考える。必要ならば以下の定数値を使ってよい。

プランク定数h : 6.6×10^{-34} J·s,　　光速c : 3.0×10^{8} m·s^{-1}

[A]このレーザーの偏光を直線偏光として以下の問いに答えよ。

(1)このレーザーが1秒間当たりに放出する光子数を求めよ。

(2)円板が光を100%吸収する場合に円板が光から受ける力を求めよ。

(3)円板が光を100%鏡面反射する場合は円板が光から受ける力は設問(2)と比べて何倍になるか。

(4)設問(2)の設定において，同じ出力だが波長が半分の光を使うと円板が光から受ける力は何倍になるか。

[B]次に波長板を使ってこのレーザー光を円偏光とした。出力は1.0 Wで変わらない。光子は角運動量I=1[$\hbar$]を持つとして以下の問いに答えよ。

(5)円板が光を100%吸収する場合に円板が光から受けるトルクを求めよ。

(6)円板が光を100%鏡面反射する場合は円板が光から受けるトルクは設問(5)と比べて何倍になるか。

(7)設問(5)の設定において，同じ出力だが波長が半分の光を使うと円板が光から受けるトルクは何倍になるか。

[C]ここまでの考察によると、光が物質に及ぼす力学的作用は極めて小さいことがわかる。このことを踏まえた上で，円板が円偏光からトルクを受けることを地上の実験室で実証したい。

(8)測定原理を述べ，それに基づく実験装置を考案し，概念図を示せ。

(9)観測をやり易くするためにはどのような円板と光源を準備すればよいか。

(10)観測を防げる要因となるものを重要なものから3つ挙げ，それぞれを解決するための対策・工夫について述べよ。