専門科目（午前）　　２４　大修

時間　午前１０：００－１２：００

物 理 学（ 午前 ）

注意事項

１．次ページ以後の３題すべてに解答せよ。

２．答案用紙は３枚である

３．解答は１題ごとに該当する答案用紙に記入せよ。

４．各答案用紙には必ず受験番号を記入せよ。

５．答案用紙は，解答を記入していないものも含めてすべて提出せよ。

６．計算用紙は回収しない。

1

[A] 複素平面上に３つの複素数 z_1，z_2 及び z_3 を表す点があり，これらの点は正三角形の３つの頂点をなす。ただし，正三角形の中心から見て，z_1, z_2, z_3 を表す頂点は，この順に反時計回りに並んでいる。

(1) $z_3 = \alpha z_1 + \beta z_2$ と表したとき，α と β を求めよ。

(2) 複素数 z を関数 $f(z) = z^2$ で変換したところ，複素平面上で $f(z_1)$ が表す点と $f(z_3)$ が表す点が一致した。$z_1 + z_3$ を求めよ。

(3) (2) のとき $f(z_2)/f(z_1)$ を求めよ。

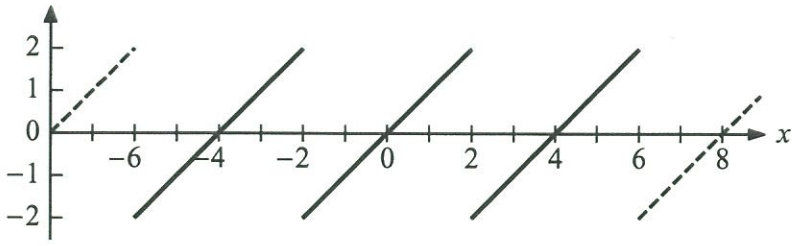
[B] 区間 $(-2, 2)$ で定義された関数 $F(x) = x$ のフーリエ級数展開を考える。一般に，関数 $F(x)$ が区間 $(-L, L)$ で定義され，この区間の外では $F(x+2L) = F(x)$ が成り立つ周期 $2L$ の周期関数に対して，$F(x)$ のフーリエ級数展開は

$$F(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

で与えられる。

(4) 区間 $(-2, 2)$ で定義された関数 $F(x) = x$ をフーリエ級数展開したときの，係数 a_3 と b_3 を求めよ。

(5) 関数 $F(x)$ を区間 $(-2, 2)$ の外へ定義域を拡張すると下図のようになる。この関数を，区間 $(-6, 6)$ を１周期と考えてフーリエ級数展開したとき，係数 b_7, b_8, b_9 を求めよ。



2 温度 T[K] の壁で囲まれた真空の空洞中には，壁から放出，吸収される光 (電磁波) が存在し，空洞放射と呼ばれる。空洞放射のエネルギー密度（単位体積あたりのエネルギー）$u(T)$ は，壁の種類によらず，温度のみによって決まる関数であると，熱力学第 2 法則から導かれる。なお，体積 V の空洞放射の内部エネルギーを $U(T,V)$ とする。

[A] 古典電磁気学によると，空洞内の光が壁に及ぼす圧力 p は $p=\frac{1}{3}u(T)$ と与えられる。

(1) 一般に，内部エネルギー $U(T,V)$ に関して，次の式が成立することを示せ。

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$$

(2) 体積 V の空洞放射の内部エネルギーは，$U(T,V)=CVT^4$（C：定数）と表せることを示せ．問 (1) の結果を使ってもよい。

(3) 空洞放射のエントロピー $S(T,V)$ を求めよ。

[B] 周波数 ν 波長 λ の光は，エネルギー $E=h\nu$，運動量の大きさ $p=\frac{h}{\lambda}$（h：プランク定数）の粒子とみなすことができ，光子と呼ばれる。空洞放射は，壁と熱平衡状態にある温度 T［K］の光子の気体であるとみなせる。光子を一辺 L の立方体空洞中を速さ c で相互作用せずに飛び回わるボーズ粒子と考え，量子統計力学で考えてみよう。なお，光は横波であるので，二つの偏光状態を持つ。

(4) 運動量 $\vec{p}$ で特定の偏光状態をもつ量子状態をとる粒子数の平均値 $N(\vec{p})$ は，ボーズ-アインシュタイン分布として与えられる。$N(\vec{p})$ を書け。光子は壁に吸収，放出されるので，化学ポテンシャル μ は，0 である。ただし，ボルツマン定数を k_B とする。

(5) 壁における境界条件を周期的境界条件として，運動量の大きさが p から $p+dp$ である量子状態の数を求めよ。

(6) 問（4）と（5）から内部エネルギー $U(T,V)$ は，VT^4 に比例することを示せ。

3 図1に示すような均一な試料 (大きさ：$a \times b \times c$) の電気抵抗率の測定を考える。この試料には電気抵抗測定用に4つ端子が取り付けられており，そのうち内側の2つの端子間距離を ℓ $(< c)$ とする。次の問に答えよ。

(1) 手元に電圧計1，電圧計2，精密固定抵抗 R_{ref}，電池 E，および導線がある。これらを使ってこの試料の電気抵抗率 ρ を正確に測定するための回路図を答案用紙の試料と精密固定抵抗の図を利用して書け。ただし，導線の抵抗は無視できないものとする。

(2) (1) の回路を用いて試料の電気抵抗率 ρ を測定したい。電圧計1および電圧計2で測定される電圧をそれぞれ V_1 および V_2 として，その測定法を150文字程度で説明し，得られる電気抵抗率の表式を書け。ただし，回路内に発生する熱起電力は無視できるとする。

(3) もし回路内に発生する熱起電力が無視できない場合にはどのような対処が必要か述べよ。ただし，測定の間に熱起電力は変化しないものとする。

(4) 試料に高純度銅およびゲルマニウムを選び，室温から極低温までの測定を行うとする。銅およびゲルマニウム，それぞれの測定結果として期待される電気抵抗率の温度依存性を図示せよ。

(5) 実験を始めると外来ノイズが測定に悪影響を及ぼしていることが判明した。そこでこのノイズを抑制するために電圧計の入力部分に図2のようなフィルターを取り付けることにした。目的に適したフィルター回路になるよう，図中の (ア)，および (イ) について，固定抵抗 R，コイル（インダクタンス L），コンデンサー（キャパシタンス C）のなかから適当なものを1つずつ選べ。ただし，固定抵抗を少なくとも1つ使うこと。

(6) このフィルタ回路の入力電圧 V_{in} と出力電圧 V_{out} の比 $\frac{|V_{out}|}{|V_{in}|}$ を周波数 f の関数として求め，さらにこのフィルター回路の遮断周波数 f_0 を求めよ。また，$\log(\frac{|V_{out}|}{|V_{in}|})$ を $\log(f/f_0)$ に対して図示せよ。ただし，$\frac{|V_{out}|}{|V_{in}|}$ が $1/\sqrt{2}$ となる周波数 f_0 を遮断周波数という。

(7) 外来ノイズを調べると，その周波数は100 kHzであった。このノイズの波高を1/100程度に減衰させるためには遮断周波数 f_0 をいくらに設定すればよいか答えよ。

(8) この時定数 $\tau = \frac{1}{2\pi f_0}$ のフィルター回路に図3のような周期 T の矩形波を入力したとき，(a) $T \ll \tau$，および (b) $T \gg \tau$ の場合について，その出力波形の概形はそれぞれどのようになるか図4の (A)〜(F) から選び簡単に理由を説明せよ。

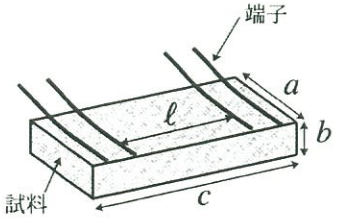


図1

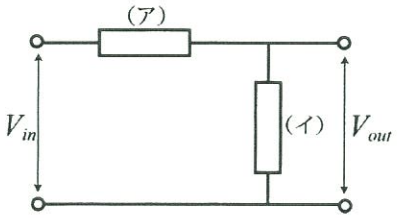


図2

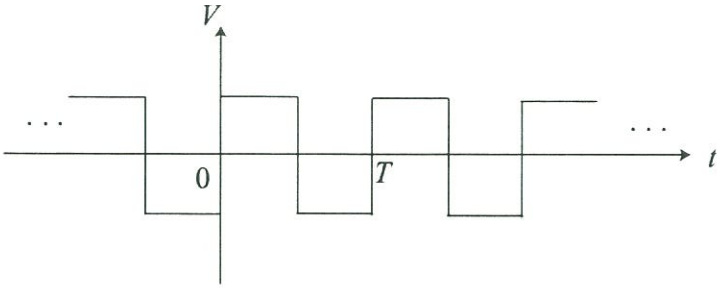


図 3

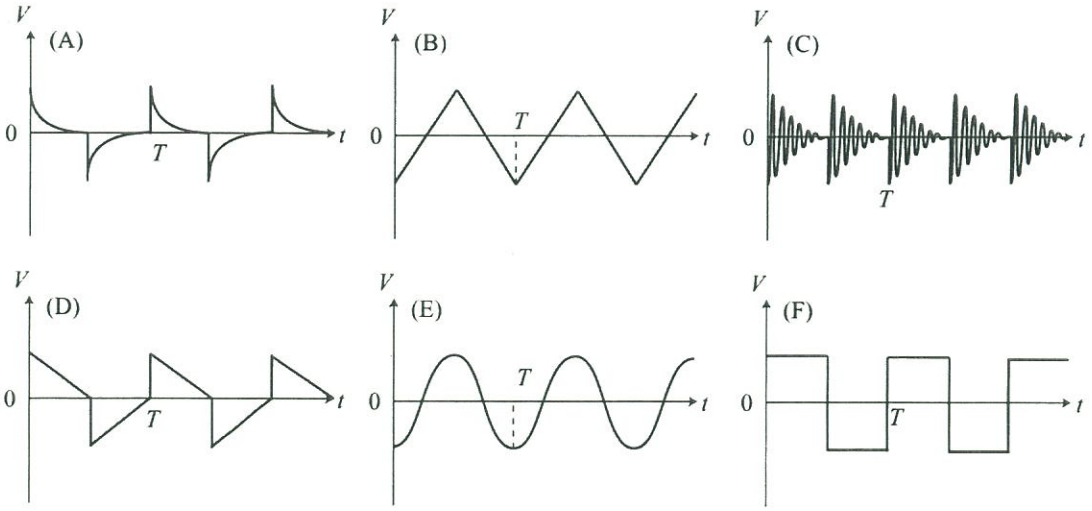


図 4

専門科目（午後）　　24 大修

時間　13:30－15:30

物　理　学　（午後）

注意事項

１．　次ページ以後の３題すべてに解答せよ。

２．　答案用紙は３枚である。

３．　解答は１題ごとに該当する答案用紙の所定の欄に記入せよ。

４．　各答案用紙には必ず受験番号を記入せよ。

５．　答案用紙は，解答を記入していないものも含めて，全て提出せよ。

６．　計算用紙は回収しない。

[1]

図1のように半径 R で質量の無視できる円板が水平に置かれていて，その中心を通る鉛直な回転軸のまわりに自由に回転できるとする。この円板の上で，中心から距離 h $(h > 0)$ のところに直線状のレールが円板に固定されていて，レールの両端 P, Q は円板の周上にある。このレールは密度が一様であり，円板の回転軸に関するこのレールの慣性モーメントは I である。この直線状のレールの上を質量 m の質点が摩擦なく動くとする。質点の位置を示すため，図1のようにこのレール上に X 座標をとり，レールの中点を $X = 0$ とする。レールの端点 P には，質量の無視できる打ち出し装置がレールに固定されており，その打ち出し装置より質点を P→Q の向きに打ち出すことができる。次の問いに答えよ。

(1) このレールの質量を I, R, h で表せ。

(2) 円板の外に静止している観測者から見た質点の位置を表すため，$t = 0$ での円板の位置を用いて，図2のように円板の中心が原点となるような xy 座標系をおく。この座標系は地面に対して静止しており，円板とともに回転することはないとする。時刻 $t = 0$ から円板が角度 θ だけ反時計まわりに回転したときに，レール上の質点の位置は X になったとする。このときの質点の座標 (x, y) を求めよ。

(3) 全系のラグランジアンを X, $\dot{X}$, θ, $\dot{\theta}$ の関数として求めよ。ただし $\dot{X} = \dfrac{dX}{dt}$, $\dot{\theta} = \dfrac{d\theta}{dt}$ とする。

(4) θ，X の時間発展を表わす微分方程式を2つ書き下せ。またこの微分方程式のうち一方は，エネルギー保存則以外のある保存則を表している。その保存則とは何か。

(5) 最初円板は静止していて，レールの一方の端Pに質点が静止しているとする。その後打ち出し装置によりこの質点を打ち出したところ，レール上を運動しもう一方の端Qまで動いた。この間の運動について以下の問いに答えよ。

(a) この間の円板の回転角度を求めよ。問 (4) で見出した保存則に着目するとよい。また，$\displaystyle\int \frac{ds}{s^2+A^2} = \frac{1}{A}\arctan\frac{s}{A}$ $(A \neq 0)$ を用いてよい。

(b) 特にレールの慣性モーメント I が非常に小さく，無視できるとき，この質点の運動を円板の外に静止している観測者から見るとどのような軌跡を描くか概形を図示し，その根拠を説明せよ。

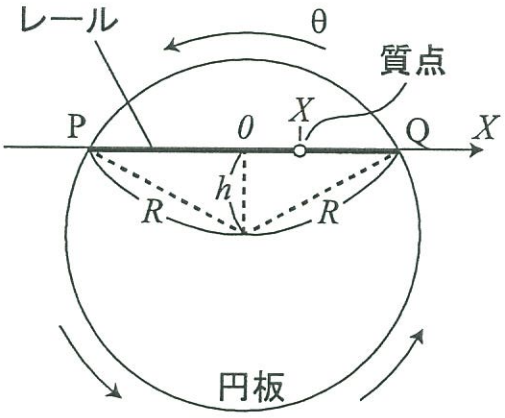


図 1

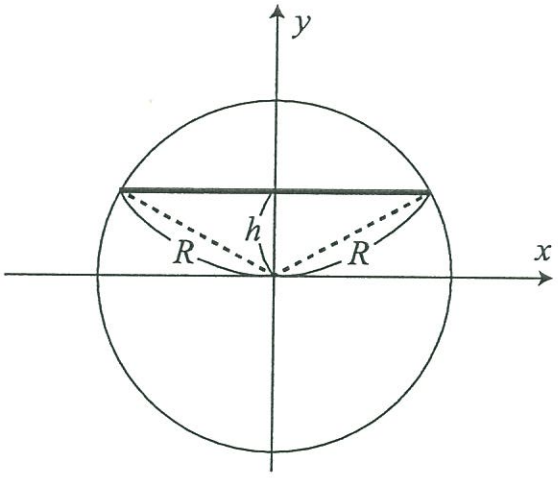


図 2

[2]

[A] 真空中に半径 b の十分に長い円柱状の完全導体がある。円柱の中心軸 O から距離 a $(a > b)$ に中心軸と平行に位置した導線 A がある。導線 A は電荷線密度 λ で一様に帯電しているとする。円柱は接地されておらず, 帯電していないとする。図 1 はこの円柱の断面, 及び導線を軸方向から見たものである。以下の問を鏡像法で考えるにあたって, 円柱状完全導体の代わりに円柱表面に関して導線 A と共役な位置 C に鏡像として線密度 $-\lambda$ の電荷を持つ直線を仮想的におく（C は図 1 のように, OA を含む面上にあり, OC 間の距離は $c = b^2/a$ である）。また, 中心軸 O に線密度 $+\lambda$ の電荷を持つ直線を仮想的におく。

位置 O から距離 r 離れた位置 R $(r \geq b)$ と位置 A, C との距離をそれぞれ r_{A}, r_{C} とする。真空中における誘電率, 透磁率をそれぞれ ε_0, μ_0 とし, また Maxwell 方程式,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t})$$

は解答にあたり適宜用いてよい。ここで $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}, \rho, \boldsymbol{j}$ は, それぞれ電場, 磁束密度, 電荷密度, 電流密度を表すとする。

以下の各問いに答えよ。

(1) 位置 R が円柱表面にあるときに距離の比率 $r_{\mathrm{A}}/r_{\mathrm{C}}$ を a, b を用いて表せ。

(2) 位置 R が任意の位置にあるときの, 位置 R における電位を求めよ。ただし, 円柱表面における電位を 0 とする。

(3) 位置 R が円柱表面外側の十分近傍にあるとして, 位置 R における円柱表面に垂直な電場成分を r_{A} の関数として求めよ。ただし, 円柱表面外向きを正ととる。

[B] 次に図 2 のように, 導線 A を取り除き, 円柱中心軸 O からの距離 a に内面を持つ薄くて十分に長い円筒型完全導体をおく。この円柱と円筒に挟まれた領域を円柱軸方向に伝搬する電磁波を考える。ただし, この円柱と円筒間の距離は伝搬する電磁波の波長に比べて十分に小さいとし円柱軸方向の電場および磁束密度の成分は無視出来るとする。また静電場と静磁場はないものとする。

(4) 完全導体近傍の電場と磁束密度に成立する境界条件を2つ答えよ。ただし, 真空に面した境界表面上の面に垂直, 平行な電場成分をそれぞれ E_n, $\boldsymbol{E}_t$ とし, 同様に磁束密度成分をそれぞれ B_n, $\boldsymbol{B}_t$ とする。

(5) 円柱軸を z 軸にとり, 図2のように円柱座標で表したとき, 円柱と円筒間の領域にある任意の点は座標 (r, θ, z) で表される。円柱と円筒に波数 k, 角振動数 ω の振動電流,

$$I_{in}(z,t) = I_0 \cos(kz - \omega t),\ I_{out}(z,t) = -I_0 \cos(kz - \omega t)$$

をそれぞれ z 軸正方向に流す。この電流に伴って円柱と円筒で挟まれた領域に伝搬速度 $c = \omega/k = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ の電磁波が生じる。$z = 0$ 面上で且つ, 円柱と円筒で挟まれた領域の任意の点 $\mathrm{P}(r, \theta, 0)$ における磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を求めよ。解答は円柱座標系での単位ベクトル $\hat{\boldsymbol{r}} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$, $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$, $\hat{\boldsymbol{z}} = (0, 0, 1)$ を用いて記せ。

(6) $z = 0$ 面上で且つ, 円柱と円筒で挟まれた領域の任意の点 $\mathrm{P}(r, \theta, 0)$ における電場 $\boldsymbol{E}$ を求めよ。問 (5) と同様に円柱座標系の単位ベクトルを用いて記せ。ただし, 円柱座標系において $\boldsymbol{A} = A_r \hat{\boldsymbol{r}} + A_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + A_z \hat{\boldsymbol{z}}$ と表される一般的なベクトル $\boldsymbol{A}$ に対する回転が,

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial}{r\partial\theta} A_z - \frac{\partial}{\partial z} A_\theta \right) \hat{\boldsymbol{r}} + \left(\frac{\partial}{\partial z} A_r - \frac{\partial}{\partial r} A_z \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} + \left\{ \frac{\partial}{r\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial}{r\partial\theta} A_r \right\} \hat{\boldsymbol{z}}$$

であることを用いてよい。

(7) $I_0 = 1.0$ A, 電磁波の伝搬速度 $c = 3.0 \times 10^8$ m/s とし, 半径をそれぞれ $a = 2.0$ cm, $b = 1.0$ cm とする。このとき単位時間あたりに中心軸に垂直な任意の断面を通過する平均エネルギー量 W [W] を求めよ。ただし, 必要であれば $\ln 2 = 0.69$, $\ln 5 = 1.61$, $\ln 7 = 1.95$ の近似, ならびに $4\pi\varepsilon_0 c^2 = 10^7 \mathrm{A \cdot m \cdot s^{-1} \cdot V^{-1}}$ を用いてよい。

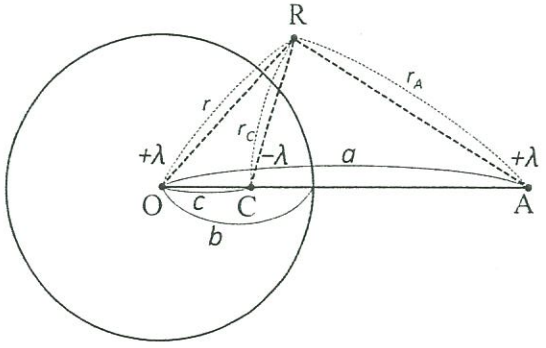


図1

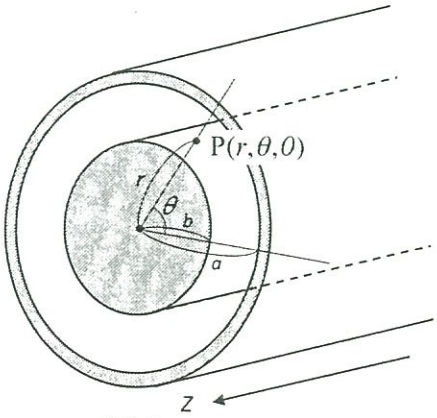


図2

[3]

原子は中心にある重い原子核と, 原子核の作るポテンシャルに束縛された電子よりなる。ここでは原子を単純化した 1 次元のモデルを考える。一つの原子は古典的な原子核と一つの電子よりなり, 原子核が位置 $x = x_0$ にあるとき, それが電子に与える影響は δ-関数型のポテンシャル

$$V(x) = -Z\delta(x - x_0) \tag{i}$$

によって表されるとする。Z は正の定数である。

電子の質量を m, プランク定数を 2π で割ったものを $\hbar$ とする。エネルギー固有値 E の定常状態にある電子の波動関数 $\psi(x)$ はシュレーディンガー方程式

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right)\psi(x) = E\psi(x) \tag{ii}$$

を満足する。

(1) 波動関数 $\psi(x)$ はいたるところ連続であるが, その微分係数 $\psi'(x) = d\psi(x)/dx$ は原子核の位置 $x = x_0$ において連続ではなく, 次の接続条件を満足する。

$$\frac{\psi'(x_0 - 0)}{\psi(x_0)} - \frac{\psi'(x_0 + 0)}{\psi(x_0)} = 2k_0. \tag{iii}$$

ただし, $\psi'(x_0 \pm 0)$ は $\psi'(x)$ の $x \to x_0$ における極限として定義され, 正の側から x を x_0 に近づけたものを $\psi'(x_0 + 0)$, 負の側から x を x_0 に近づけたものを $\psi'(x_0 - 0)$ と表した。k_0 を $Z, m, \hbar$ を用いて表せ。

(2) 原子が一つだけであり, その原子核が原点 $x = 0$ にある場合を考える。電子の基底状態の波動関数 $\psi_0(x)$ と, そのエネルギー固有値 E_0 を求めよ。波動関数の規格化は問わない。解答には k_0 を用いてよい。

(3) 原子が二つある場合, すなわち原子核と電子が二つずつある場合を考える。ただし, 電子同士の相互作用は考えない。二つの原子核の位置を $x = \pm a$ $(a > 0)$ とする。このとき二つの原子核が電子に与える影響はポテンシャル

$$V(x) = -Z\delta(x - a) - Z\delta(x + a) \tag{iv}$$

によって表される。パウリの排他律を考慮すると, 二つの電子のエネルギーの合計が最も小さくなるのは, 一つの電子が基底状態 ψ_1 に, もう一つの電子が第 1 励起状態 ψ_2 にあるときである。(電子のスピン自由度は無視する。) ψ_1 は x の偶関数であり, ψ_2 は x の奇関数である。a が十分大きいときには ψ_1 と ψ_2 はともにエネルギー固有値が負の束縛状態であるが, a をゆっくりと小さくしていくと, a がある値 a_0 になったところで ψ_2 のエネルギー固有

値は 0 になり, 束縛状態ではなくなる。その結果, 状態 ψ_2 にあった電子は原子から放出され, イオン化が起こる。a_0 を求めよ。解答には k_0 を用いてよい。

(4) 引き続き問 (3) で考えた二原子系を考える。電子の基底状態 ψ_1 は a の値によらず束縛状態である。$x \geq a$ における波動関数を $\psi_1(x) = e^{-k_1 x}$ としたとき, 接続条件 (iii) が $x = \pm a$ において満足されるために k_1 と k_0 の間に成り立つべき関係式を求めよ。

(5) 問 (3) でイオン化が起こったあと, 二つの原子を再びゆっくりと引き離す。二つの原子はイオン化したままであり, 系はポテンシャル (iv) によって表される二つの原子核と, 基底状態にある一つの電子よりなる。このとき $ak_0 \gg 1$ という近似を用い, 二つの原子の間に働く力を求めよ。ただし, 原子の間に働く力は原子核間の距離を変化させるために必要な仕事を用いて定義する。力が斥力であるか引力であるかを明記すること。解答には k_0 を用いてよい。