専門科目（午前）　　２５　大修

時間　午前１０：００－１２：００

物 理 学（午前）

注意事項

１．次ページ以降の３題すべてに解答せよ。

２．答案用紙は３枚である。

３．解答は１題ごとに該当する答案用紙に記入せよ。

４．各答案用紙には必ず受験番号を記入せよ。

５．答案用紙は，解答を記入していないものも含めてすべて提出せよ。

６．問題冊子，計算用紙は回収するので持ち帰らないこと。

1 望遠鏡を搭載した細長い人工衛星の指向安定性を以下のモデルで考察する。図1に示すように、同じ質量 m の質点AとBを長さ $2d$ の剛体棒の両端に固定した物体の重心が、質量 M の質点(天体)Cを中心として半径 r の等速円運動をしている。ここで、物体には天体Cからの重力以外の外力は働かず、$M \gg m$、$r \gg d$、かつ剛体棒の質量は無視できるものとする。また、万有引力定数を G とする。

(1) 図1のように、この物体の長軸(剛体棒の方向)がつねに天体Cの方向を向いて運動している場合、質点A、Bそれぞれが剛体棒に及ぼす力 F_A および F_B の大きさと向きを求めよ。

(2) 天体Cと物体の重心Pを結ぶ直線と物体の長軸とのなす角度が θ(図2参照)のとき、物体に働く力のモーメントを求めよ。

(3) この物体の公転軸に平行でPを通る軸のまわりの回転運動について、前問の角度 θ に関する運動方程式を記せ。

(4) θ が微小な場合について、前問の運動方程式の一般解を示せ。

(5) この物体がその長軸を常に天体Cの方向を向けて運動している。時刻 $t = 0$ において物体に微小な偶力が瞬間的に働き、軌道角運動量と平行な小さな角運動量が加わった。その後の物体の運動を定性的に記述せよ。

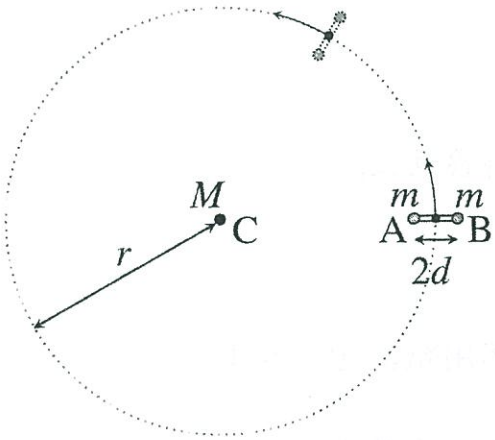

図 1:

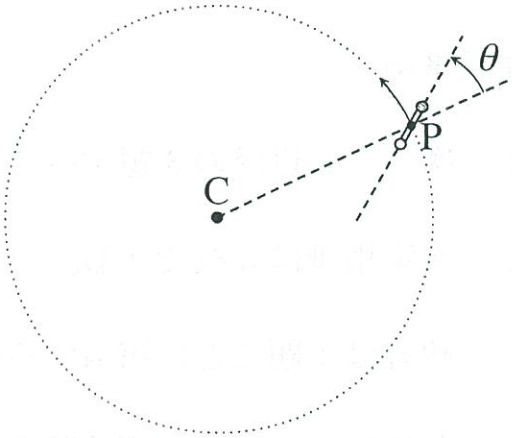

図 2:

2 以下の問に答えよ。ただし真空中の誘電率を ϵ_0 とする。

[A] 間隔 l の平行平板電極に電圧 V をかけた。

(1) 図 1 のように電圧をかけた導線を外してから厚さ d の金属板を 2 つの電極の間に、電極と平行になるように入れた。このとき、(a) 電極と金属板の間の電場の大きさと、(b) 金属板表面の片面に生じた電荷の密度を求めよ。

(2) (1) と同様、電圧をかけた導線を外してから今度は金属板の代わりに同じ大きさで等方的な物質でできた誘電体（誘電率 ϵ）を入れた。このとき、(a) 電極と誘電体の間の電場の大きさ、(b) 誘電体内部の電場の大きさ、(c) 誘電体の表面に生じた分極電荷の密度を求めよ。

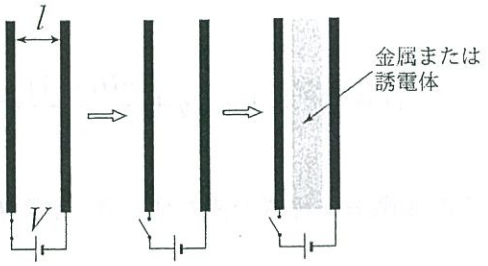

図 1:

[B] 図 2 のように一様な外部電場 $\boldsymbol{E}_0$ のかけられた真空中に、表面が平らで厚さが一定の等方的な物質でできた誘電体（誘電率 ϵ）の無限に広い平板を、表面が外部電場に垂直な方向から θ[rad] だけ傾けて入れた。このとき、誘電体の表面に分極電荷が生じた。

(3) 分極電荷は誘電体両側の表面に一様に生じる。この電荷による電場は (a) 誘電体内部でどの方向を向くか。(b) 誘電体の外側ではどうか。

(4) 誘電体内部の電場は分極電荷による電場と外部電場で合成された電場 $\boldsymbol{E}$ となる。この電場の大きさを誘電体の表面に (a) 垂直な成分と、(b) 平行な成分に分けて答えよ。

(5) この合成された電場 $\boldsymbol{E}$ の、誘電体表面に垂直な方向からの傾き ϕ[rad] を求めよ。

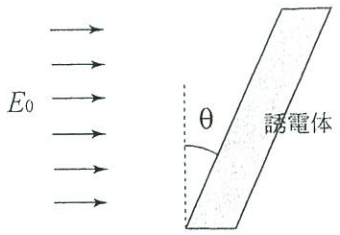

図 2:

3 負でない整数 $n\,(=0,1,2,3,\cdots)$ に対して, 以下の恒等式により多項式 $P_n(x)$ を定義する。各問に答えよ。

$$G(t,x)=\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\,t^n,\qquad |t|<1,\quad |2xt-t^2|<1.$$

(1) $P_n(1)$ を求めよ。

(2) $P_0(x), P_1(x), P_2(x)$ を求めよ。但し, 以下の展開式 ($|y|<1$, α は実数) を用いても良い。

$$(1+y)^{\alpha}=1+\alpha y+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}y^2+\mathcal{O}(y^3).$$

(3) $G(t,x)$ が以下の偏微分方程式を満たすとき, 定数 k を求めよ。

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}-kx\frac{\partial G}{\partial x}+t\frac{\partial^2}{\partial t^2}(tG)=0.$$

(4) 問 (3) の偏微分方程式を用いて, $P_n(x)$ に対する常微分方程式を導け。

(5) 問 (4) で得られた常微分方程式を用いて, $m\neq n$ のとき, 以下の値を求めよ。

$$\int_{-1}^{1}dx P_n(x)P_m(x).$$

専門科目（午後）　　２５　大修

時間　午後１：３０－３：３０

物 理 学（午後）

注意事項

１．次ページ以降の３題すべてに解答せよ。

２．答案用紙は３枚である。

３．解答は１題ごとに該当する答案用紙に記入せよ。

４．各答案用紙には必ず受験番号を記入せよ。

５．答案用紙は，解答を記入していないものも含めてすべて提出せよ。

６．問題冊子，計算用紙は回収するので持ち帰らないこと。

1 x 座標に沿った一次元の運動をしている質量 m の粒子が、ポテンシャル $V(x)$ の下で束縛状態にあるとする。異なる束縛状態はエネルギーが低い順に量子数 $n = 0, 1, 2, \cdots$ で区別され、縮退はないものとする。n 番目の状態の波動関数 $\psi_n(x)$ とエネルギー E_n はシュレディンガー方程式

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right)\psi_n(x) = E_n\psi_n(x), \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

を満たす。以下の問いに答えよ。

(1) ポテンシャル $V(x)$ が偶関数であるとき、基底状態と第一励起状態の波動関数の節の数と偶奇性を答えよ。

(2) ポテンシャルが、L を正の定数として

$$V_a(x) = \begin{cases} 0 & -L/2 \leq x \leq L/2 \\ +\infty & x < -L/2,\ \ L/2 < x \end{cases}$$

で与えられるとき、基底状態と第一励起状態の波動関数、$\psi_0(x)$ と $\psi_1(x)$、およびエネルギー、E_0 と E_1 を求めよ。ただし、波動関数は規格化しなくてよい。

(3) ポテンシャルが、正の定数 ω を用いて

$$V_b(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

で与えられるとき、基底状態と第一励起状態の波動関数、$\phi_0(x)$ と $\phi_1(x)$ は、0 以上の整数 p と q を用いて

$$\phi_0(x) = ax^p \exp(-cx^2), \qquad \phi_1(x) = bx^q \exp(-cx^2)$$

と書けることが分かっている。これらの波動関数について、まず指数関数の形を決めよう。波動関数が無限遠方 $(x \to \pm\infty)$ でシュレディンガー方程式の解になっていることを用いて定数 c を求めよ。

(4) p と q を求めて波動関数 $\phi_0(x)$ と $\phi_1(x)$ を決定せよ。規格化はしなくてよい。

(5) 基底状態 $\phi_0(x)$ のエネルギー $\mathcal{E}_0$ を持つ粒子について、古典力学により運動が許される範囲を、正の定数 L_0 を用いて $-L_0/2 \leq x \leq L_0/2$ と表わすとき、$\mathcal{E}_0$ を m、L_0 と $\hbar$ を用いて表せ。

(6) $L_0 = L$ であるとき、ポテンシャルが $V_a(x)$ のときの基底状態のエネルギー E_0 と、$V_b(x)$ のときのエネルギー $\mathcal{E}_0$ との差異はどのような量子力学的性質によるのか、簡単に述べよ。

2 以下の問に答えよ。

[A] 図1はオペアンプの回路図記号である。オペアンプは基本的には反転入力（－入力），非反転入力（＋入力），出力の3端子で構成される。図1で表わされる理想的なオペアンプについては，入力電流 I_- と I_+ に関して $I_- = 0$，$I_+ = 0$ と見なすことができる。また，入力電圧 V_- と V_+ に関して $V_- = V_+$ と見なすことができる。以下の問でオペアンプは理想的であるとする。

(1) 図2で表わされる回路について，増幅率 $V_{\mathrm{out}}/V_{\mathrm{in}}$ を抵抗 R_1 と抵抗 R_2 を用いて表せ。ただし，V_{out} は出力電圧，V_{in} は入力電圧である。

(2) 図3で表わされる回路について，出力電圧 V を入力電流 I と抵抗 R を用いて表せ。また，$I = 1\mathrm{nA}$，$R = 100\mathrm{M}\Omega$ のときの出力電圧Vを求め，この回路の利用目的を考察せよ。

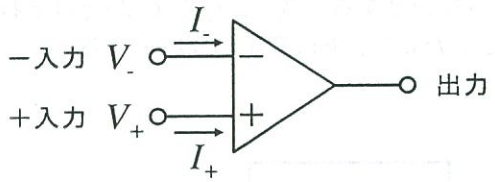

図1

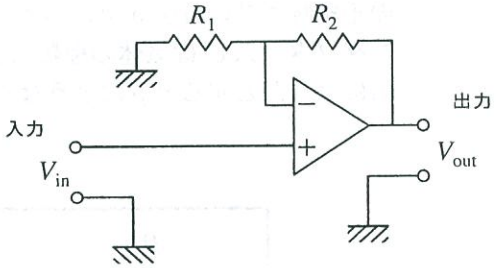

図2

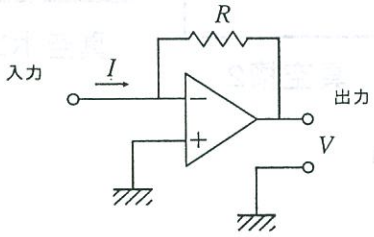

図3

[B] 図4は連結真空排気系の模式図である。真空槽1と真空槽2はコンダクタンスCを変化できるバルブV_{12}により接続されていて，真空槽2は真空ポンプにより排気速度Sで排気されている。また，真空槽1にはコンダクタンスを変化できるバルブVが接続され，真空槽1に気体流量Qの気体を導入することができる。図4で，真空槽1，および，真空槽2の気体の圧力をそれぞれp_1，および，p_2とする。このとき，コンダクタンスCは，p_1，p_2，および，V_{12}により真空槽1から真空槽2へ流入する気体流量Q_{12}を用いて，$C = Q_{12}/(p_1 - p_2)$で定義できる。以下の問ではp_1とp_2は時間的に変化しない（定常状態）とする。

(3) VからQ = $2.0 \times 10^{-8}\mathrm{Pa \cdot m^3/s}$で酸素が真空槽1に流入していたとする。$C = 1.0 \times 10^{-4}\mathrm{m^3/s}$と設定して，$S = 2.0 \times 10^{-1}\mathrm{m^3/s}$であったとするとき，$p_1$，および，$p_2$を求めよ。ただし，$p_1 \gg p_2$として，また，真空ポンプの到達圧力は十分小さく，$p_2$にくらべて無視できるとする。

(4) 真空槽1の内壁より不純物ガスが放出されていたとする。このとき，不純物ガスの気体流量qはp_1に比例して，$q = kp_1$で与えられるとする。$Q = 2.0 \times 10^{-8}\mathrm{Pa \cdot m^3/s}$，$C = 1.0 \times 10^{-4}\mathrm{m^3/s}$，$k = 1.0 \times 10^{-6}\mathrm{m^3/s}$のときの真空槽1での不純物ガスの分圧$p$を求めよ。ただし，$p_1 \gg p$，$p_1 \gg p_2$とする。なお，コンダクタンス$C$は気体の種類によらないとする。次に，$Q$と$C$がそれぞれ10倍になったとすると$p$はどうなるか。ただし，$k$は変化しないとする。

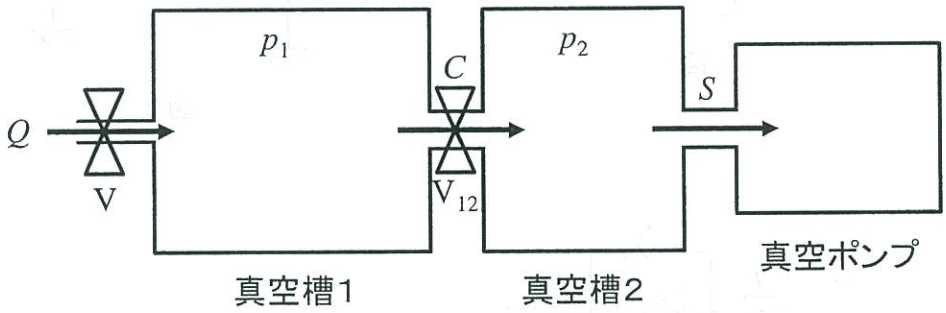

図4

$\boxed{3}$ 以下の問いに答えよ。プランク定数を h、ボルツマン定数を k_B とする。

[A] 体積 V の容器に入った質量 m の単原子分子 N 個からなる理想気体を古典統計力学の立場から考えてみる。運動量 $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ を持つ自由な1原子のハミルトニアンは、以下の式で与えられる。

$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}$$

(1) カノニカル分布を用いて、温度 T における分配関数 Z を求めよ。以下のガウス積分を用いてもよい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a > 0)$$

(2) ヘルムホルツの自由エネルギー F は以下の形で求められる。

$$F = -Nk_BT\left(\boxed{\quad ① \quad} \log T + \boxed{\quad ② \quad} \log \frac{V}{N} + \log \boxed{\quad ③ \quad} \right)$$

①、②、③に入る適切な数または数式を答えよ。十分大きな N に対して成立するスターリングの式を用いてもよい。

$$\log N! \sim N \log N - N$$

(3) この系の化学ポテンシャル μ を圧力 p を用いて表せ。以下の式を用いてもよい。

$$\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,V}$$

[B] 分子1個を吸着できる点を N 個有する面がある。これが、化学ポテンシャル μ を持つある気体と接触している。吸着した分子は、$-\epsilon$ のエネルギーをもつ $(\epsilon > 0)$。

(4) この系の大分配関数 Ξ を求めよ。

(5) ある温度 T における平均吸着分子数 n を計算し、面の被覆率 $\theta(T) = n/N$ を求めよ。

(6) この気体が単原子分子の理想気体である場合、問 [A] の結果を用いることができる。このとき、被覆率 $\theta(T)$ の概形を描き、振る舞いについて考察せよ。