専門科目（午前）　　２６　大修

時間　午前１０：００－１２：００

物 理 学（ 午前 ）

注意事項

1．次ページ以降の３題すべてに解答せよ．

2．答案用紙は３枚である．

3．解答は１題ごとに該当する答案用紙に記入せよ．

4．各答案用紙には必ず受験番号を記入せよ．

5．答案用紙は，解答を記入していないものも含めてすべて提出せよ．

6．問題冊子，計算用紙は回収するので持ち帰らないこと．

$\boxed{1}$

関数 $f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$ をそれぞれ次のように定義する．

$$f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f_2(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad f_3(x) = \frac{1}{x^2 \tan x}.$$

(1) 関数 $f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$ それぞれに対して，全ての極の位置と，それらにおける留数を求めよ．解答欄には極の位置とその留数を左右に並べて書く事．極がない場合には極の位置の欄の一つ目に「なし」と記入すること．無限個の極を表す場合には，正の整数 $n = 1, 2, 3, \ldots$ を用いて解答すること．例えば $x = -1, -2, -3, \ldots$ の位置に極がある場合には極の位置の欄に $x = -n$ と記入し，それぞれの極での留数を n を用いて記すこと．

(2) 関数 $f_1(x)$ と $f_2(x)$ に対するフーリエ変換

$$\tilde{f}_1(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} f_1(x) dx, \quad \tilde{f}_2(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} f_2(x) dx$$

を，留数定理を用いて計算せよ．答が不連続な関数になる場合には，不連続点以外での関数形を示せばよい．導出過程の欄には，用いた積分経路を図示せよ．

(3) 関数 $f_3(x)$ の複素積分を利用して，無限和

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

を計算せよ．導出過程の欄には，用いた積分経路を図示せよ．

2

[A] 原点を共通とする2つの直交座標系 $S(x, y, z)$，および $S'(x', y', z')$ を考える．座標系 S は慣性系である．z' 軸は z 軸と共通であって，座標系 S' は z' 軸の回りに一定の角速度 ω で回転している．ただし，z 軸正の領域から見て反時計回りを正とする．質量 m の質点について考えるものとし，以下の文中の空欄に入る語句あるいは式を答えよ．なお，時間 t に関する微分を表すのにドット $(\cdot)$ を用いてたとえば dx/dt の代わりに $\dot{x}$ と表しても良い．また，(ク) についてのみ計算過程を示し，それ以外については導出過程を含めずに答えること．

(1) 座標系 S' で観測すると，座標 (x', y', z') に位置する質点には2種類の見かけの力が働く．そのうち一方の力は [(ア)] と呼ばれ，つねに質点から z' 軸に下ろした垂線の方向で，z' 軸から遠ざかる向きに働く．その (x', y', z') 成分は [(イ)] である．もう一方の力は [(ウ)] と呼ばれ，(x', y', z') 成分は [(エ)] である．また，その方向は質点の速度の $x'y'$ 面内成分に [(オ)] である．

(2) 地球の自転が質点に及ぼす影響を (1) と同様に考えよう．ただし自転の角速度を ω とする．地表面のある場所を原点とし，その場所での鉛直上向きを Z 軸とする直交座標系 (X, Y, Z) を用いる．この場合もやはり2種類の見かけの力が働く．今考えている場所の緯度が ϕ で，質点の運動が水平面内に限られるとき，上記（ウ）の力の X, Y 成分はそれぞれ [(カ)]，[(キ)] となる．なお，質点の位置座標を $(X, Y, 0)$ とし，また，北緯の場合は ϕ を正，南緯の場合は負にとるものとする．次に，緯度が $60°$ の地点で上記（ア）の力の大きさを質点の質量が 1 kg の場合に数値で求め，有効数字2桁で，単位を含めて示すと [(ク)] となる．なお地球の半径については各自知るところの値を用いよ．

[B] 放物線 $z = Ax^2$ （A は正の定数）の上に質量 m の質点がなめらかに束縛されている．z 軸をその正方向を上向きとして鉛直にし，一定の角速度 ω で放物線を z 軸のまわりに回転させた．重力加速度の大きさを g とする．また空気による抵抗は考えない．以下の問に答えよ．

(3) 質点が放物線上の $x = x_1 (> 0)$ の位置にあるとき，質点が放物線上をどちらにも動かずにとどまるための条件を求めよ．

(4) 質点が放物線上の $x = 0$ の位置にあるとき，そこからの微小変位に対して質点が安定あるいは不安定となる条件を答えよ．

(5) 前問 (4) で，微小変位に対して安定であるとき，質点は $x = 0$ の周辺で単振動を行なうことができる．振動の振幅が十分小さいときの振動の周期を求めよ．

3 質量 m の粒子が，幅 L の無限に深い井戸型ポテンシャル $V(x)$ の中で基底状態にあるとする．図 1 のように，時刻 $t=0$ でポテンシャルの幅を瞬間的に $2L$ に広げたとき，波動関数がどう時間発展するか考える．換算プランク定数を $\hbar$ とする．以下の問に答えよ．(3)(4) については，導出過程を含めずに答えること．

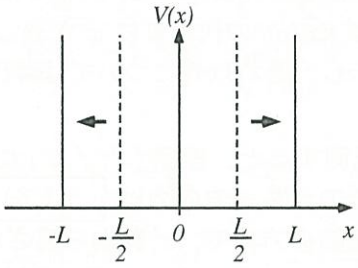

図 1: 井戸型ポテンシャル．

(1) $t<0$ における基底状態の波動関数 $\psi_1(x,t)$ を求めよ．ただし，$\int_{-L/2}^{L/2}|\psi_1(x,t)|^2dx = L/2$ とする．

(2) ポテンシャルの幅を広げた後に波動関数がどうなるかを考えるには，まず前問で求めた初期状態の波動関数 ψ_1 を，幅 $2L$ の井戸型ポテンシャルの各固有状態の波動関数 ψ'_n で展開すればよい：

$$\psi_1(x,0) = \sum_n A'_n \psi'_n(x,0) \ . \tag{1}$$

ここで、エネルギーの低い方から順に $n=1,2,3\cdots$ とする．基底状態の波動関数 ψ'_1 の展開係数 A'_1 を求めよ．ただし，$\int_{-L}^{L}|\psi'_n(x,t)|^2dx = L$ とする．

(3) 展開係数 A'_2 はゼロである．展開係数 A'_3 を求めよ．

(4) $t>0$ における基底状態 $(n=1)$ および第二励起状態 $(n=3)$ のエネルギー E'_1 および E'_3 を求めよ．

(5) 確率密度分布は，ある時間周期 T で変化する．この時間周期 T を求めよ．

専門科目（午後）

26 大修

時間　午後1:30－3:30

物 理 学（午後）

注意事項

1. 次ページ以降の3題すべてに解答せよ。

2. 答案用紙は3枚である。

3. 解答は 1題ごとに該当する答案用紙に記入せよ。

4. 各答案用紙には必ず受験番号を記入せよ。

5. 答案用紙は、解答を記入していないものも含めてすべて提出せよ。

6. 問題冊子、計算用紙は回収するので持ち帰らないこと。

1

A 君:　「導線を巻いただけの空芯のコイルに乾電池で電流を流しても，たいした磁束密度は得られない．でも，大きな透磁率μ（$\mu >> \mu_a$：μ_aは空気の透磁率）をもつ常磁性体の棒をコイルに差し込むと，クリップや鉄くずがくっつくほどの磁束密度が得られる．何故なんだろうね？」

B 君:　「磁束密度は磁界に透磁率をかけることで求まるよね．空芯の場合に比べて，磁性体が入っている方が透磁率が大きいので，大きな磁束密度が得られるということじゃないかな？」

A 君:　「でも，その説明だと，磁性体の棒の外でも磁束密度が大きくなる理由がわからないよ.」

B 君:　「た，確かに・・・」

A 君が出した疑問に答えるため，以下のことを考えることにする．

(1) 図１のように，透磁率の異なる２種の磁性体１，２が接している．境界面に伝導電流が存在しないとして，静磁界について成り立つ境界条件を，以下の(ア) ～ (エ) の中から選び，記号を解答欄に記入せよ．境界面に平行な単位ベクトルを$\vec{t}$，境界面に垂直な単位ベクトルを$\vec{n}$とする．磁性体１の境界面近傍での磁界，磁束密度を$\vec{H}_1$，$\vec{B}_1$，磁性体２の境界面近傍での磁界，磁束密度を$\vec{H}_2$，$\vec{B}_2$とする．

(ア) $\vec{H}_1 \cdot \vec{t} = \vec{H}_2 \cdot \vec{t}$　(イ) $\vec{H}_1 \cdot \vec{n} = \vec{H}_2 \cdot \vec{n}$　(ウ) $\vec{B}_1 \cdot \vec{t} = \vec{B}_2 \cdot \vec{t}$　(エ) $\vec{B}_1 \cdot \vec{n} = \vec{B}_2 \cdot \vec{n}$

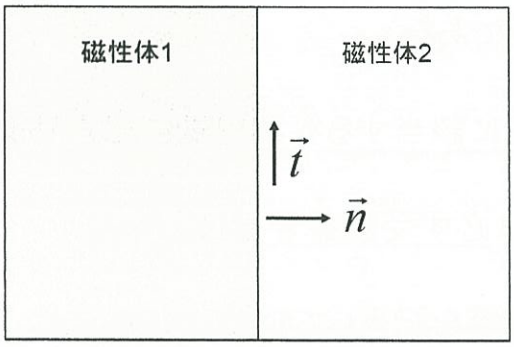

図１　二つの磁性体とその境界面における単位ベクトル

(2) (1)で選択した境界条件を，マクスウェル方程式を用いて導出せよ．

(3) 図２のように，透磁率$\mu(\mu >> \mu_a)$の常磁性体がはいった，単位長さあたりの巻き数nのドーナツ型コイルがある．常磁性体の一部には間隔xの空隙が設けられている（コイルには切れ目がないものとする）．コイルの中心軸に沿って１周した長さをLとする（つまり磁性体の長さは$L-x$）．コイルに電流Iを流すと，磁性体内部に，コイルの軸方向にそった一様な磁束密度が発生した．空隙はきわめて狭く，磁束が外へ漏れ出ることはないものとする．以下の問に答えよ．

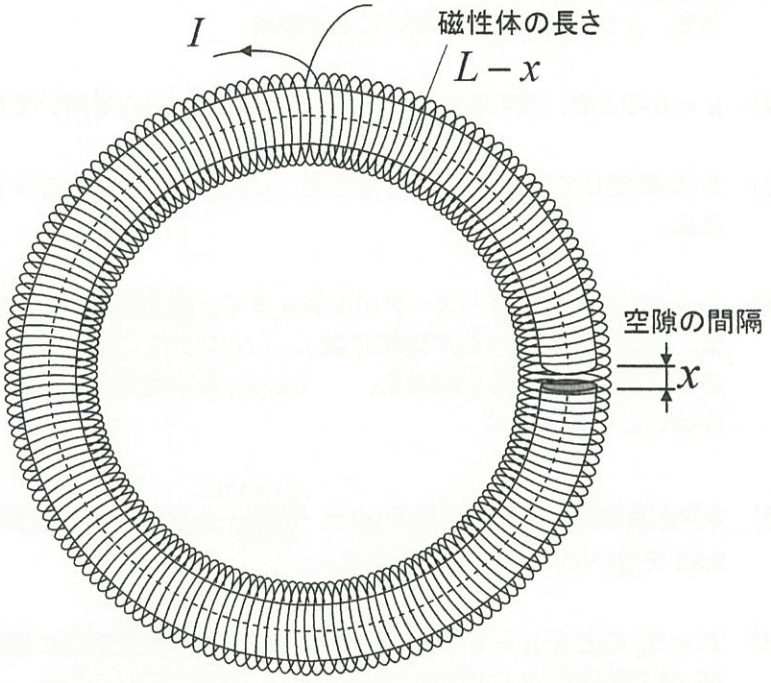

図２　常磁性体が入ったドーナツ型コイルと空隙

(a)　コイルの中心軸にそってアンペールの法則を適用し，空隙に発生する磁束密度の大きさB_sを，μ，μ_a，n，L，x，Iを用いて表せ．

(b)　コイルの内部から常磁性体を外し空芯にしても，磁束はコイルの内部に閉じ込められているものとする．このとき，磁束密度の大きさB_aを，μ_a，n，Iを用いて表せ．

(c)　以上の計算結果をふまえて，A 君の最初の質問に対する適切な解答を数行の文章で述べよ．

2 質量 m の 3 次元自由粒子からなる温度 T，化学ポテンシャル μ の理想ボース気体を考える．系の体積を V，換算プランク定数を $\hbar$，ボルツマン定数を k として以下の問に答えよ．

(1) エネルギーが ϵ の 1 粒子状態を占める平均粒子数はボース分布関数 $f(\epsilon) = \dfrac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/(kT)}-1}$ で与えられる．1 粒子基底状態のエネルギーが $\epsilon = 0$ であるとき，$\mu > 0$ とはなり得ないことを示せ．

(2) $\mu < 0$ のとき，系の平均粒子数 N を状態密度 $D(\epsilon)$ を用いて表せ．

(3) N を固定して T を減少させたとき，μ は単調に増加するか，減少するか，答えよ．

(4) $\mu = 0$ に達するとボース・アインシュタイン凝縮が起こる．そのときの温度 T_c は，単位体積あたりの平均粒子数 $n = N/V$ のどのような冪（べき）に依存するか，次元解析から考察せよ．　（$k, m, \hbar, n$ を用いて温度の次元を持つ量を作ることを考えよ。）

(5) 3 次元自由粒子の状態密度 $D(\epsilon) = \dfrac{(2m)^{3/2}}{4\pi^2\hbar^3}\sqrt{\epsilon}\,V$ と積分の結果 $\displaystyle\int_0^\infty dx\,\frac{\sqrt{x}}{e^x-1} \simeq 2.32$ を用いて，T_c の表式を求めよ．

(6) $T < T_c$ のとき $\mu = 0$ である．このとき 1 粒子基底状態に凝縮する平均粒子数 N_0 の全粒子数 N に対する割合を T, T_c のみを用いて表せ．

3

[A] データ処理に関する以下の問に答えよ．

(1) ある物理量 x（無次元）の測定を同じ方法で5回繰り返して行ったところ，以下の結果を得た．測定の間，x の値を変化させるような要因はなかったものする．

測定回 (i)	1	2	3	4	5
測定値 (x_i)	1013	1007	998	994	1008

測定装置の系統誤差は無視できるほど小さく，測定値のばらつきは偶然誤差（統計誤差）のみによるとして，この測定から得られる x の値として最も適当な値を，誤差を含めて書け．誤差は有効数字2桁を取るものとする．必要であれば以下の概数を用いよ．
$\sqrt{2} \approx 1.41, \sqrt{3} \approx 1.73, \sqrt{5} \approx 2.24, \sqrt{10} \approx 3.16$

(2) ある変数 x を変えながら別の量 y を測定したところ，以下の結果を得た．

測定番号 i	1	2	3	4	5
x_i	-2	-1	0	1	2
$y_i \pm \sigma_i$	-3±1	-1±1	1±1	0±1	2±1

ここで σ は y の測定誤差で，全ての測定において同じ値であった．各測定は独立に行われたものとし，x の誤差は考えないものとする．y と x の間に $y = f(x) \equiv ax + b$ の関係があると仮定し，最適な a と b の値を最小二乗法を用いて求めよ．ただし a と b の誤差は求めなくてよい．最小二乗法とは，評価量

$$S = \sum_i \frac{(y_i - f(x_i))^2}{\sigma_i^2}$$

を最小にする関数 $f(x)$ のパラメータ（この場合は a と b）を求める方法である．

[B] 東日本大震災に伴う福島第一原子力発電所の事故では，放射性物質が環境中に放出され，大きな社会問題となった．福島県内では土壌からの放射性物質の除染などの対策が行われている．また，住民が食物から体内に摂取する放射性物質（内部被曝）の量をコントロールするため，WBC（ホールボディカウンター）を用いた個々人の被曝測定が病院などで行われている．以下の問に答えよ．

(3) 図 1 は環境中に放出された代表的な放射性同位元素の一つであるセシウム 137 の崩壊図である．図のア，イ，ウの過程で生じる放射線の名称を（α 線，β 線，γ 線）から選んで解答欄に書け．また，これらの放射線のうち，WBC が体外で測定しているのは主にどの過程で生じるものか，解答欄のア，イ，ウから 1 つ選んでその記号を丸で囲め．

(4) ある場所で採取した土壌中のセシウム 137 の放射能を測定したところ，1kg あたり 1.6×10^4Bq であった．ここで Bq（ベクレル）とは 1 秒間に崩壊する放射性同位体の数を表す．この土壌 1kg を容器中に密閉し保管した場合，3.02 年後に残存するセシウム 137 の量は何 Bq か，有効数字 2 桁で求めよ．ただし，セシウム 137 の半減期（放射性物質の量が半分になる時間）は 30.2 年である．$\log_e 2 \approx 0.693$ を用いてよい．

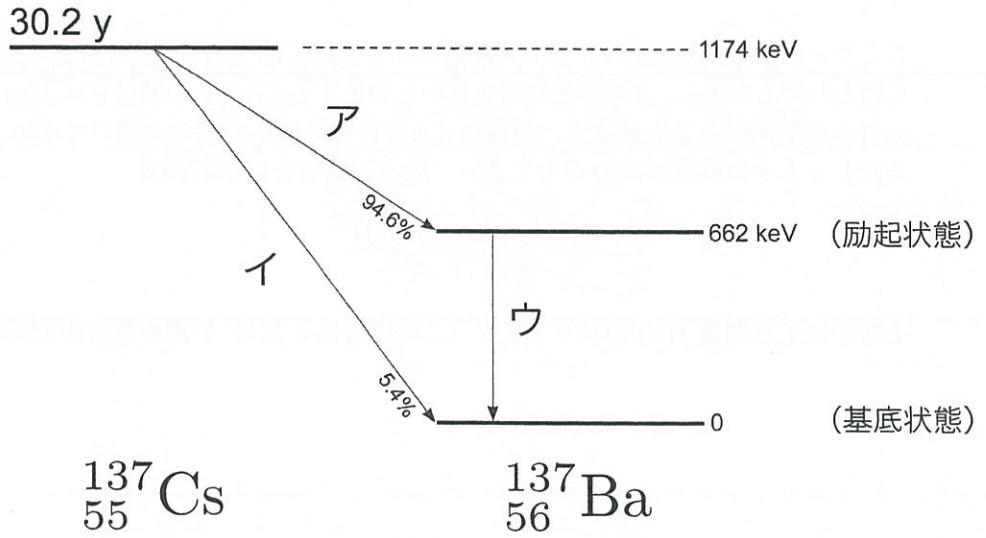

図 1: セシウム 137 の原子核崩壊図．右側の数値はエネルギー準位を表す．