専門科目（午前）　　　　　　　　　　　　　　　２８　大修

時間　午前１０：００－１２：００

物理学（午前）

受験番号

注意事項

１．　次ページ以降の３題すべてに解答せよ。

２．　答案用紙は３枚である。

３．　解答は１題ごとに該当する答案用紙に記入せよ。

４．　各答案用紙には必ず受験番号を記入せよ。

５．　答案用紙は，解答を記入してないものも含めてすべて提出せよ。

６．　問題冊子および計算用紙の第１ページに受験番号を記入せよ。

７．　問題冊子および計算用紙は回収するので持ち帰らないこと。

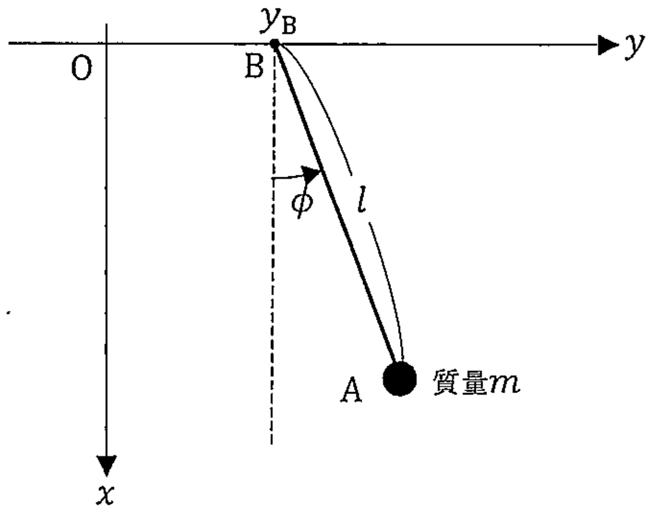
1 図のように，質量が無視できて伸び縮みしない長さ l の糸の先端 A に，大きさの無視できる質量 m のおもりが取り付けられている。他端 B を糸がたるまないように水平な直線上で運動させる。鉛直下方をx軸，B の動く直線をy軸とする。B のy軸上の位置をy_B，糸のx軸方向に対する角度をϕ(反時計回りを正)で表す。重力加速度をgとして以下の問に答えよ。

(1) B をgより十分小さい一定の加速度 a で動かしたところ，B とともに動く座標系から見たとき，おもりは微小な単振動を行った。このときϕを時刻 t の関数で表せ。ただし$t = 0$ のとき，$\phi = 0$，$\dot{\phi} = 0$とする。また，$|\phi|$ は小さく$\sin\phi \fallingdotseq \phi$とみなしてよい。

(2) y_Bがtの関数として与えられたとき，おもりに関するラグランジアンを，ϕを一般化座標に用いて表せ。さらに運動方程式を求めよ。

(3) B を$y_B = y_0\cos\omega_0 t$で振動させた。このとき(2)で求めた運動方程式を，ω_0と振り子の固有角振動数$\sqrt{g/l}$ が等しくない場合について解け。ただし$t = 0$ のとき$\phi = 0$，$\dot{\phi} = 0$とする。また，$|\phi|$ は小さく$\sin\phi \fallingdotseq \phi$とみなしてよい。

(4) (3)と同様に B を振動させる。ω_0と振り子の固有角振動数$\sqrt{g/l}$ が等しい場合，振幅は時間とともにどのように変化するか。簡潔に記述せよ。



$\boxed{2}$ 半径がそれぞれ a, b $(a < b)$ で，共に厚さが無視でき無限に長い同軸導体円筒がある。２つの導体円筒の間は誘電率が ϵ，透磁率が μ の完全な絶縁体で満たされている。以下の問に答えよ。なお，座標軸として円筒の中心軸に沿って z 軸を，それに垂直な面内に x, y 軸をとる。

[A] 内外の導体にそれぞれ軸方向の単位長さ当たり λ, $-\lambda$ $(\lambda > 0)$ の電荷を与えた。

(1) 中心軸から r の距離の位置における電場 E の大きさと向きを求めよ。

(2) 両導体間の電位差 V, および軸方向の単位長さ当たりの静電容量 C を求めよ。

[B] 次に，今度は２つの導体に電流 I (> 0) を流した場合を考える。電流は中心軸方向に，互いに逆向き（内側導体では $+z$, 外側導体では $-z$ 方向）に，一様に流れているとする。

(3) 中心軸から r の距離の位置における磁束密度 B の大きさと向きを求めよ。

(4) 中心軸に沿った単位長さの部分に蓄えられる磁気エネルギーを求めよ。

(5) 中心軸方向の単位長さ当たりの自己インダクタンス L を求めよ。

[C] 今考えている同軸導体を用いて電磁波を送る場合について考察する。次の文中の空欄に入る式を答えよ。

(6) まず一般に，電荷も伝導電流も存在しない空間では $\boxed{\text{ア}} = -\partial B/\partial t$, および $\mathrm{rot}\ B = \boxed{\text{イ}}$ が成り立つ。ただし t は時間である。さらに，今考えている系のように電流に往路と帰路があって電流の総和が０であるとき，z 方向に進む電磁波において $E_z = 0, B_z = 0$ とすることができる。ただし E_z は E の z 成分であり，他の成分についても以下同様に表す。これらから，E_x の z に関する２階偏微分と t に関する２階偏微分との間に $\boxed{\quad\text{ウ}\quad}$ なる関係が成り立ち，電磁波の伝播速度 v は ϵ および μ を用いて $v = \boxed{\text{エ}}$ と書ける。

(7) 続いて今度は同軸導体間に電圧を加え，内外の導体に互いに逆向きの電流を流し，電力を供給している状況のもとで，いわゆるポインティングベクトルについて考えよう。同軸導体間の電圧を V, 流れる電流の大きさを I とすれば，中心軸からの距離 r の位置でのポインティングベクトルの大きさ S は $\boxed{\text{オ}}$ であり，これを半径 a から b の部分の断面について積分した結果は $\boxed{\text{カ}}$ となる。

$\boxed{3}$ 以下の問に答えよ。

[A] 以下の行列 A について，小問 (1) から (3) に答えよ。解答用紙には答のみを記入せよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) $\det A$ を求めよ。

(2) A の逆行列 A^{-1} を求めよ。

(3) A の固有値 $\lambda_i (i = 1, 2, 3)$ と，それに対応する固有ベクトル $u_i (i = 1, 2, 3)$ を求めよ。ただし，固有ベクトルは大きさ 1 に規格化せよ。符号の不定性が残るが，どちらか一方を書けばよい。

[B] 次の定積分を計算せよ。結果は実数のみで表すこと。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4 + 4} dx$$

[C] $-\pi \leq x \leq \pi$ で定義された関数 $f(x) = x^2$ を以下のようにフーリエ級数展開する。フーリエ係数 a_0 および $a_n, b_n (n = 1, 2, \ldots)$ を求めよ。

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

専門科目（午後）　　　　　　　　　　　　　２８　大修

時間　午後１：３０－３：３０

物 理 学（午 後）

受 験 番 号

注意事項

1．　次ページ以降の３題すべてに解答せよ。

2．　答案用紙は３枚である。

3．　解答は１題ごとに該当する答案用紙に記入せよ。

4．　各答案用紙には必ず受験番号を記入せよ。

5．　答案用紙は，解答を記入してないものも含めてすべて提出せよ。

6．　問題冊子および計算用紙の第１ページに受験番号を記入せよ。

7．　問題冊子および計算用紙は回収するので持ち帰らないこと。

1

図 1 のように，地面に固定されたフレームから質量 m の物体をバネ定数 k のバネで吊るし，鉛直方向の地面振動を測定する。各時刻 t における地面の位置を $x(t)$，バネに吊るされた物体の位置を $y(t)$ とする。物体にはナイフの刃がついていて，フレームに固定されたレーザーから放出されるビームの一部をその刃先が遮っている。物体が動くことによって光検出器に入射する光量が変化し，光量に比例してアンプに流れ込む電流 $I_{\rm in}(t)$ が変わる。アンプを介して電流を電圧に変換し，出力電圧 $V_{\rm out}(t)$ から地面振動の大きさを知ることができる。アンプはオペアンプを用いた反転増幅器で，光検出器と反転入力端子 $(-)$ の間に抵抗値 R_1 の抵抗を加え，非反転入力端子 $(+)$ を接地し，抵抗値 R_2 のフィードバック抵抗と容量 C のコンデンサを通じて出力から反転入力端子に負帰還をかけている。以下の問に答えよ。ただし，摩擦や空気抵抗は無視できるものとする。なお，t の関数 $f(t)$ のフーリエ変換は，

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

で定義される。

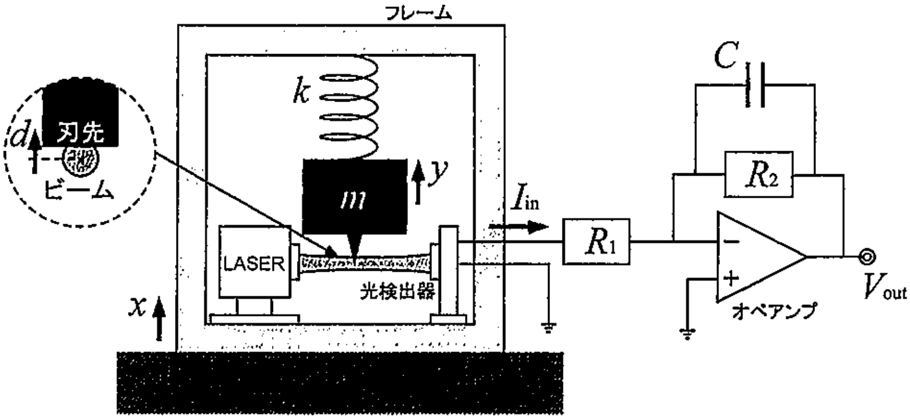


図 1

(1) 光軸上の，刃先がレーザービームを遮っている地点において，ビームの中心を原点として，刃先の鉛直方向の変位を $d(t)$ とすると，$d(t) = y(t) - x(t)$ で与えられる。$d(t)$ と $x(t)$ のフーリエ変換の比 $F(\omega) \equiv \tilde{d}(\omega)/\tilde{x}(\omega)$ を ω，k，m のうち必要なものを用いて表せ。

(2) $V_{\rm out}(t)$ と $I_{\rm in}(t)$ のフーリエ変換の比 $G(\omega) \equiv \tilde{V}_{\rm out}(\omega)/\tilde{I}_{\rm in}(\omega)$ の絶対値の対数表示を表すグラフにもっとも近いものを図 2 の (a)~(d) から選べ。また，選択した図中に示されている ω_0 を，R_1，R_2，C のうち必要なものを用いて表せ。

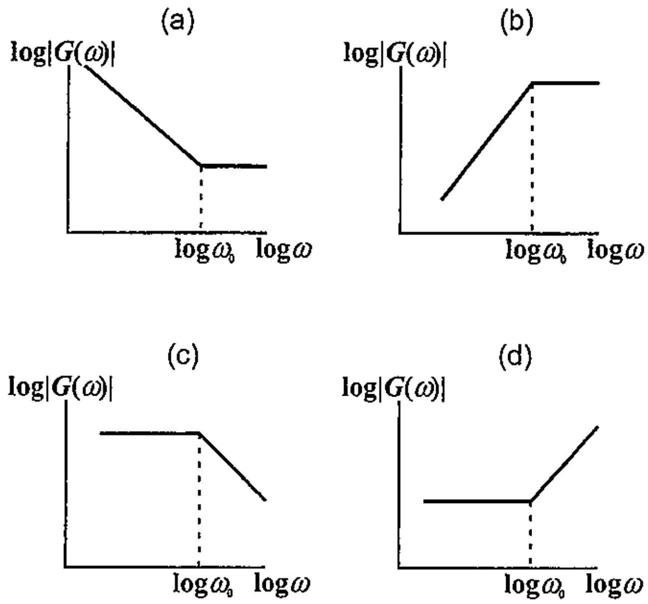


図 2

(3) レーザーの光量は，ビームの中心を原点とした直交座標 (u, v) を用いて $P_0 e^{-(u^2+v^2)/r_0^2}$ で表される。ここで，P_0 と r_0 は定数であり，r_0 はビームの半径と呼ばれる。刃先が微小距離 Δd だけ動くと，光検出器の出力電流が $\Delta I_{\rm in}$ だけ変化するものとする。同じ Δd に対して，刃先がビームの中心で光を遮っている場合の $\Delta I_{\rm in}\,(\equiv \Delta I_{\rm in}^A)$ と，刃先がビームの中心から $r_0/2$ だけ離れたところで光を遮っている場合の $\Delta I_{\rm in}\,(\equiv \Delta I_{\rm in}^B)$ の比 $\Delta I_{\rm in}^A/\Delta I_{\rm in}^B$ はいくらか。ただし刃の幅は r_0 より十分広く，刃先は r_0 より十分小さな範囲でしか動かないものとしてよい。

(4) いま，刃先はビームの中心で光を遮っているとし，$\eta \equiv \Delta I_{\rm in}^A/\Delta d$ は刃先の動く速さによらず一定とする。$H(\omega) \equiv \tilde{V}_{\rm out}(\omega)/\tilde{x}(\omega)$ を，η，ω，k，m，R_1，R_2，C のうち必要なものを用いて表せ。

(5) この装置は，バネの共振周波数より高い周波数で，地面の変位を出力する構造になっている。なるべく広い帯域で，同じ地面振動に対してなるべく大きな信号を得るためには，バネ定数は大きい方がよいか小さい方がよいか，また，刃先に遮られる直前のビームの半径は大きい方がよいか小さい方がよいか，それぞれ簡潔な理由を付して答えよ。なお，レーザーから出射される光量は同一とし，また，光検出器の効率はビーム半径によらないものとする。

2

2次元理想ボース気体を考える。粒子の質量を m, 系の面積を Ω, 粒子数を N, 温度を T, プランク定数を h, ボルツマン定数を k として, 以下の問に答えよ。

(1) 2次元自由粒子の状態密度 $D(\varepsilon)$ を求め, ε の関数として図示せよ。ただし, ε は一粒子のエネルギーである。

(2) 次の関数 $f(\alpha)$ $(\alpha < 0)$ について, $\alpha \to -\infty$ における極限値を求めよ。また, 導関数 $f'(\alpha)$ の符号を調べることにより, $f(\alpha)$ の概形を描け。ただし, $f(\alpha) \to \infty$ $(\alpha \to -0)$ であることを用いてよい。

$$f(\alpha) = \int_0^\infty \frac{dx}{e^{x-\alpha} - 1}$$

(3) $f(\alpha)$ の性質を利用して, 任意の温度 T $(T \neq 0)$ に対して化学ポテンシャル μ が $\mu < 0$ となる領域で一意に定まることを示せ。

(4) 2次元理想ボース気体では, 有限温度でボース・アインシュタイン凝縮が起こらないことを示せ。

$\boxed{3}$ ヘリウム原子を構成する質量 m，電荷 $-e$ の2個の電子の量子力学的状態について考える。この2電子系のハミルトニアン $\mathcal{H}(1,2)$ は

$$\mathcal{H}(1,2) = \mathcal{H}_0(1)+\mathcal{H}_0(2) + V(1,2)$$
$$\mathcal{H}_0(i) = \frac{p_i^2}{2m} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Ze^2}{r_i} \quad (Z=2, \quad i=1,2)$$
$$V(1,2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r_{12}}$$

と表わされる。1電子ハミルトニアン $\mathcal{H}_0(i)$ の固有関数のうち，$1s$ 状態と $2p_z$ 状態を $\psi_s(i)$, $\psi_p(i)$ と表わし，それぞれの状態の固有エネルギーを E_s，E_p とする。ただし，$\psi_s(i)$ と $\psi_p(i)$ はともに実関数であるとする。いま，$1s$ 軌道と $2p_z$ 軌道のそれぞれが1個の電子で占有された励起状態を考えよう。電子スピン s の z 成分の固有値が $(\pm 1/2)\hbar$ であるようなスピン関数を $\chi_\pm(i)$ で表す。ただし定数 $\hbar$ は $\hbar = h/(2\pi)$ (h はプランク定数) である。いま，2個の電子のうち1個が χ_+，もう1個が χ_- の状態をとるとする。

(1) 2個の電子の非区別性については後で考察することにして，まず $V(1,2)$ を摂動とした，1次の摂動エネルギー補正を求めよう。2個の電子は，空間部分について1個が ψ_s，他方が ψ_p をとり，スピン部分についても1個が χ_+，他方が χ_- をとっている。このとき非摂動系のハミルトニアン $\mathcal{H}_0(1)+\mathcal{H}_0(2)$ のエネルギー固有値 E_s+E_p は4重に縮退している。縮退した部分空間の基底関数を

$$\psi_1 = \psi_s(1)\psi_p(2)\chi_+(1)\chi_-(2)$$
$$\psi_2 = \psi_s(1)\psi_p(2)\chi_-(1)\chi_+(2)$$
$$\psi_3 = \psi_p(1)\psi_s(2)\chi_+(1)\chi_-(2)$$
$$\psi_4 = \psi_p(1)\psi_s(2)\chi_-(1)\chi_+(2)$$

ととり，ハミルトニアン $\mathcal{H}(1,2)$ の行列を表せ。必要なら以下の空間積分 J と K を用いてよい。

$$J = \int dx_1^3 \int dx_2^3 \psi_s(1)\psi_p(2)V(1,2)\psi_s(1)\psi_p(2)$$
$$K = \int dx_1^3 \int dx_2^3 \psi_s(1)\psi_p(2)V(1,2)\psi_p(1)\psi_s(2)$$

(2) (1) でつくったハミルトニアン行列の固有関数 $\phi_1, \cdots, \phi_4$ と固有エネルギー $E_1, \cdots, E_4$ を求めよ。ただし固有関数 $\phi_1, \cdots, \phi_4$ は $\psi_1, \cdots, \psi_4$ を用いて表せ。

(3) (2) の結果をみると，4重の縮退は完全には解けていない。ここで2個の電子の非区別性を考慮すると，(2) で求めた固有関数の線形結合を取ることにより，ヘリウム原子の電子状態として許されるものを2つ構成できる。それらを Ψ_1 と Ψ_2 とし，$\psi_s(i)$, $\psi_p(i)$, $\chi_+(i)$, $\chi_-(i)$ $(i=1,2)$ を用いて表せ。

(4) (3) で求めた電子状態 Ψ_1 と Ψ_2 のそれぞれについて $\boldsymbol{S}(1,2)^2 = (\boldsymbol{s}(1) + \boldsymbol{s}(2))^2$ の固有関数であることを 1/2 スピンに関する以下の関係式を用いて示し，その固有値を求めよ。

$$s_z(i)\chi_\pm(i) = \pm\frac{\hbar}{2}\chi_\pm(i)$$

$$s_x(i)\chi_\pm(i) = \frac{\hbar}{2}\chi_\mp(i)$$

$$s_y(i)\chi_\pm(i) = \pm i\frac{\hbar}{2}\chi_\mp(i)$$

$$\boldsymbol{s}(i)^2\chi_\pm(i) = (s_x(i)^2 + s_y(i)^2 + s_z(i)^2)\chi_\pm(i) = \frac{3}{4}\hbar^2\chi_\pm(i)$$